

السنة الدراسية : 2012/13	فرض محروس رقم 2	الثانوية الجـاحظ التأهيلية
المدة: ساعة	الدورة الاولى	
استاذ: عبد الفتاح قويدر	في مادة الرياضيات	المستوى: 2 عت 1
$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n + 2}{2 + U_n} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$		التنقيط
<p>تمرين I: لتكن <math>(U_n)</math> المتتالية العددية المعرفة بمايلي :</p>		6ن
<p>(1) احسب <math>U_1</math> و <math>U_2</math></p>		0.5ن
<p>(2) بين بالترجع <math>1 \leq U_n &lt; 2</math> ; <math>\forall n \in \mathbb{N}</math></p>		0.75
<p>(3) أ- تحقق من ان <math>U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n+1)(2-U_n)}{2+U_n}</math></p>		1ن
<p>ب- ادرس رتبة المتتالية <math>(U_n)</math></p>		0.75
<p>ج- استنتج ان <math>(U_n)</math> متقاربة</p>		0.5ن
<p>(4) نضع <math>\forall n \in \mathbb{N} V_n = \frac{U_n+1}{U_n-2}</math></p>		
<p>أ- بين ان <math>(V_n)</math> متتالية هندسية اساسها 4 ثم حدد <math>V_n</math> بدلالة <math>n</math></p>		1ن
<p>ب- بين ان <math>\forall n \in \mathbb{N} ; U_n = \frac{2V_n+1}{V_n-1}</math> ثم احسب نهاية <math>(U_n)</math></p>		1.5ن
<p>تمرين II:</p>		10ن
<p>نعتبر الدالة العددية <math>f</math> المعرفة بمايلي :</p> $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x(x^2 - 1)} - x ; x > 1 \\ x\sqrt{1-x} ; x \geq 1 \end{cases}$		
<p>1- بين ان الدالة <math>f</math> متصلة في 1</p>		0.5ن
<p>2- أ- ادرس قابلية اشتقاق <math>f</math> على اليسار وعلى اليمين في 1</p>		1ن
<p>ب- اعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليها</p>		0.5ن
<p>3- ضع جدول تغيرات الدالة <math>f</math></p>		1.5ن
<p>4- أ- احسب <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}</math> واول هندسيا النتيجة المتوصل اليها</p>		1ن
<p>ب- بين ان <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0</math>، ماذا تستنتج ؟</p>		1ن
<p>ج- ادرس الوضع النسبي للمنحنى الدالة <math>f</math> بالنسبة للمستقيم <math>(\Delta)</math> الذي معادلته <math>y = x</math></p>		1ن
<p>د- انشئ المنحنى <math>(C)</math> في معلم متعامد ممنظم</p>		1.5ن
<p>5- بين ان <math>g</math> قصور الدالة <math>f</math> على المجال <math>[1; +\infty[</math> تقبل دالة عكسية معرفة على <math>J</math> تم تحديده</p>		1ن
<p>6- انشئ <math>(C_{g^{-1}})</math> منحنى الدالة <math>g^{-1}</math> في نفس المعلم السابق</p>		1ن
<p>تمرين 3(*) : لتكن <math>(U_n)</math> المتتالية العددية المعرفة بمايلي :</p> $\begin{cases} U_0 = U_1 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + U_{n-1} ; n \geq 1 \end{cases}$		4ن
<p>1- بين ان لكل <math>n</math> من <math>\mathbb{N} : U_n \geq n</math> ثم احسب نهاية <math>U_n</math></p>		1ن
<p>2- بين بالترجع ان : <math>\forall n \in \mathbb{N}^* ; U_n^2 = U_{n-1} \times U_{n+1} + (-1)^n</math></p>		1ن
<p>3- نضع ان <math>\forall n \in \mathbb{N} ; V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}</math></p>		
<p>بين ان <math>V_{n+1} - V_n = \frac{(-1)^n}{U_n U_{n+1}}</math>، ثم استنتج نهاية <math>V_{n+1} - V_n</math></p>		2ن
<p>والله ولي التوفيق</p>		

تمرين الأول:

لتكن  $(U_n)$  المتتالية العددية المعرفة بمايلي :  $U_0 = 1$   
 $U_{n+1} = \frac{3U_n+2}{2+U_n}$  ;  $n \in \mathbb{N}$

(1) احسب  $U_1$  و  $U_2$ 

$$U_2 = \frac{3U_1+2}{2+U_1} = \frac{21}{11} \text{ و } U_1 = \frac{3U_0+2}{2+U_0} = \frac{5}{3}$$

(2) بين بالترجع  $1 \leq U_n < 2$  ;  $\forall n \in \mathbb{N}$ من اجل  $n=0$  لدينا  $U_0 = 1$  و  $1 \leq 1 < 2$  اذن  $1 \leq U_0 < 2$ نفترض ان :  $1 \leq U_n < 2$  ;  $\forall n \in \mathbb{N}$  و نبين ان  $1 \leq U_{n+1} < 2$ 

$$\text{لدينا } U_{n+1} - 2 = \frac{U_n - 2}{U_n + 2} \text{ و لدينا } 1 \leq U_n < 2 \text{ فإن } \frac{U_n - 2}{U_n + 2} < 0 \text{ اي } U_{n+1} < 2$$

$$U_{n+1} - 1 = \frac{2U_n}{U_n + 2} \text{ و لدينا } U_n > 0 \text{ فإن } \frac{2U_n}{U_n + 2} > 0 \text{ اي } U_{n+1} > 1$$

وبالتالي  $1 \leq U_{n+1} < 2$ ومنه  $1 \leq U_n < 2$  ;  $\forall n \in \mathbb{N}$ (3) أ- تحقق من ان  $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n+1)(2-U_n)}{2+U_n}$ 

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n+2}{2+U_n} - U_n = \frac{3U_n+2-U_n^2-2U_n}{2+U_n} = \frac{-U_n^2+U_n+2}{2+U_n} = \frac{(U_n+1)(2-U_n)}{2+U_n}$$

ب- ادرس رتبة المتتالية  $(U_n)$ 

$$\text{لدينا } U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n+1)(2-U_n)}{2+U_n} \text{ و } 1 \leq U_n < 2 \text{ ; } \forall n \in \mathbb{N} \text{ فإن } 2 - U_n > 0$$

$$\text{و } \frac{U_n+1}{2+U_n} > 0 \text{ و منه } U_{n+1} > U_n \text{ و بالتالي فإن } (U_n) \text{ تزايدية قطعاً}$$

ج- استنتج ان  $(U_n)$  متقاربةبما أن  $(U_n)$  تزايدية ومكبورة بالعدد 2 فإنها متقاربة

$$(4) \text{ نضع } V_n = \frac{U_n+1}{U_n-2} \text{ ; } \forall n \in \mathbb{N}$$

أ- بين ان  $(V_n)$  متتالية هندسية اساسها 4

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}+1}{U_{n+1}-2} = \frac{\frac{3U_n+2}{2+U_n}+1}{\frac{3U_n+2}{2+U_n}-2} = \frac{U_n+1}{U_n-2} = 4V_n$$

وبالتالي  $(V_n)$  متتالية هندسية اساسها 4 و حدها الاول -2  $V_0 = \frac{U_0+1}{U_0-2} = -2$

لنحدد  $V_n$  بدلالة  $n$   $V_n = V_0 q^n = -2 \times 4^n$ ;  $\forall n \in \mathbb{N}$

ب- لنبين ان  $U_n = \frac{2V_n+1}{V_n-1}$

$$V_n = \frac{U_n+1}{U_n-2} \Leftrightarrow (U_n - 2) V_n = U_n + 1 \Leftrightarrow U_n (V_n - 1) = 2V_n + 1$$

وبالتالي  $\forall n \in \mathbb{N} U_n = \frac{2V_n+1}{V_n-1}$

لنحسب نهاية  $(U_n)$

$$U_n = \frac{2V_n + 1}{V_n - 1} = \frac{2 \times -2 \times 4^n + 1}{-2 \times 4^n - 1} = \frac{-4^{n+1} + 1}{-2 \times 4^n - 1} = \frac{4^n(4 - \frac{1}{4^n})}{4^n(2 + \frac{1}{4^n})} = \frac{4 - \frac{1}{4^n}}{2 + \frac{1}{4^n}}$$

وبالتالي  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 - \frac{1}{4^n}}{2 + \frac{1}{4^n}} = 2$  لان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} = 0$

تمرين 2:

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بمايلي :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x(x^2 - 1)} ; x > 1 \\ x\sqrt{1-x} ; x \leq 1 \end{cases}$$

1- بين ان الدالة  $f$  متصلة في 1

لدينا  $f(0)=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[3]{x(x^2 - 1)} = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x\sqrt{1-x} = 0 = f(0)$$

وبما ان  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 = f(0)$  وبالتالي  $f$  متصلة في 1

2- أ- ادرس قابلية اشتقاق  $f$  على اليسار وعلى اليمين في 1

لندرس قابلية اشتقاق  $f$  على اليسار في 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x\sqrt{1-x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x\sqrt{1-x}}{-(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x}{\sqrt{1-x}} = -\infty$$

وبالتالي  $f$  غير قابلية اشتقاق على اليسار في 1

لندرس قابلية اشتقاق  $f$  على اليمين في 1

$$\lim_{1^+} \frac{\sqrt[3]{x(x^2 - 1)}}{x - 1} = \lim_{1^+} \sqrt[3]{\frac{x(x^2 - 1)}{(x - 1)^3}} = \lim_{1^+} \sqrt[3]{\frac{x(x + 1)}{(x - 1)^2}} = +\infty$$

وبالتالي  $f$  غير قابلية اشتقاق على اليمين في 1

ت- اعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليها

❖ وبما ان  $f$  غير قابلية اشتقاق على اليسار في 1 فان منحنى الدالة  $f$  يقبل نصف مماس عمودي نحو

الاسفل على يسار 1

❖ بما ان  $f$  غير قابلية اشتقاق على اليمين في 1 فان منحنى الدالة  $f$  يقبل نصف مماس عمودي نحو

الاعلى على يمين 1

3- ضع جدول تغيرات الدالة  $f$

لندرس قابلية اشتقاق  $f$  على اليمين في 1

الدالة  $f(x) = \sqrt[3]{x(x^2 - 1)}$  موجبة قطعاً وقابلة للاشتقاق على  $]1; +\infty[$

اذن الدالة  $f(x) = \sqrt[3]{x(x^2 - 1)}$  قابلة للاشتقاق على  $]1; +\infty[$

$$\forall x \in ]1; +\infty[ ; f'(x) = \frac{3x^2 - 1}{3\sqrt[3]{(x(x^2 - 1))^2}}$$

اشارة  $f'(x)$  على  $]1; +\infty[$  هي اشارة  $3x^2 - 1$  بما ان  $x > 1$  فان  $3x^2 > 3$  وبالتالي  $3x^2 - 1$

$$1 > 0$$

لندرس قابلية اشتقاق  $f$  على اليمين في 1

الدالة  $f = uv$  اذن  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]1; +\infty[$  ( لانها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق )

$$\forall x \in ]1; +\infty[ ; f'(x) = \sqrt{1 - x} + x \frac{-1}{2\sqrt{1 - x}} = \frac{2 - 3x}{2\sqrt{1 - x}}$$

❖ اشارة  $f'(x)$  على  $]1; +\infty[$  هي اشارة  $2 - 3x$

$x$	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$2 - 3x$	$+$	$\circ$	$-$

❖ جدول تغيرات الدالة  $f$

$x$	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$0$	$+\infty$

4- أ- احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  واول هندسيا النتيجة المتوصل اليها

احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-x} = +\infty$$

للم التاويل الهندسي :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ لدينا}$$

وبالتالي فإن منحنى الدالة  $f$  يقبل فرعاً شلجيميا اتجاهه محور الارايب بجوار  $-\infty$

ب- بين ان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ ، ماذا تستنتج ؟

لنحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[3]{x(x^2 - 1)} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x - x^3}{\sqrt[3]{(x(x^2 - 1))^2 + x^3 \sqrt{x(x^2 - 1) + x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt[3]{(x(x^2 - 1))^2 + x^3 \sqrt{x(x^2 - 1) + x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x \left( \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \sqrt{x(x^2 - 1) + x}} \right)} = 0$$

$$\text{لان } \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \sqrt{x(x^2 - 1) + x}} \right) = +\infty \right)$$

للم التاويل الهندسي :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ لدينا}$$

وبالتالي فإن منحنى الدالة  $f$  يقبل مقاربا مائلا معادلته  $y=x$  بجوار  $+\infty$

ج- ادرس الوضع النسبي للمنحنى للدالة  $f$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = x$

$$f(x) - x = \frac{-x}{\sqrt[3]{(x(x^2-1))^2 + x^3} + \sqrt[3]{x(x^2-1)} + x^2}$$

وبما أن  $\sqrt[3]{(x(x^2-1))^2 + x^3} + \sqrt[3]{x(x^2-1)} + x^2 > 0$  و  $-x < 0$  لكل  $x$  من المجال  $[1; +\infty[$

وبالتالي  $f(x) - x < 0$  على المجال  $[1; +\infty[$

د- انشئ المنحنى  $(C)$  في معلم متعامد ممنظم

5- بين ان  $g$  قصور الدالة  $f$  على المجال  $[1; +\infty[$  تقبل دالة عكسية معرفة على  $J$  تم تحديده

لدينا  $x \mapsto x^3 - x$  متصلة و موجبة على المجال  $[1; +\infty[$  ومنه  $g$  متصلة على المجال  $[1; +\infty[$  وتزايدية قطعا على المجال  $[1; +\infty[$  وبالتالي  $g$  تقبل دالة عكسية معرفة على المجال  $J$

$$g([1; +\infty[) = [g(1); \lim_{+\infty} f(x)[ = [0; +\infty[$$

انشئ  $(C_{g^{-1}})$  منحنى الدالة  $g^{-1}$  في نفس المعلم السابق

منحنيان  $(C_g)$  و  $(C_{g^{-1}})$  متماثلان بالنسبة للمنصف الاول للمعلم ، اي بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة

$$y = x$$

تمرين 3(\*): لتكن  $(U_n)$  المتتالية العددية المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} U_0 = U_1 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + U_{n-1} ; n \geq 1 \end{cases}$$

1- بين ان لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  :  $U_n \geq n$  ثم احسب نهاية  $U_n$

لنبين ان لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  :  $U_n \geq n$

من اجل  $n=0$  لدينا  $U_0 = 1$  و  $1 \geq 0$  اذن  $U_0 \geq 0$

نفترض ان :  $U_n \geq n$  ;  $\forall n \in \mathbb{N}$  و نبين ان  $U_{n+1} \geq n+1$

لدينا  $U_{n+1} = U_n + U_{n-1}$  و اي ان  $U_{n+1} - U_n = U_{n-1} > 0$

(لان  $U_{n-1} \geq n-1 > 0$ ) ومنه فإن  $(U_n)$  المتتالية تزايدية قطعا

اي ان  $U_n \geq U_{n-1} \geq U_1$

وبالتالي  $U_{n+1} = U_n + U_{n-1} \geq n + 1$  اي  $U_{n+1} \geq n + 1$

وبالتالي لكل  $n \in \mathbb{N}$  من  $U_n \geq n$

ومنه  $\forall n \in \mathbb{N}; 1 \leq U_n < 2$

لـ احسب نهاية  $U_n$  :

لدينا  $\lim_{+\infty} n = +\infty$  وبما ان  $U_n \geq n$  وبالتالي  $\lim_{+\infty} U_n = +\infty$

2- بين بالترجع ان :  $U_n^2 = U_{n-1} \times U_{n+1} + (-1)^n$  ;  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

من اجل  $n=1$  لدينا  $U_1 = 1$  و  $U_0 = 1$  و  $U_2 = U_1 + U_0 = 2$

وبالتالي  $U_1^2 = U_0 \times U_2 + (-1)^1 = 2 - 1 = 1$

نفترض ان :  $U_n^2 = U_{n-1} \times U_{n+1} + (-1)^n$  ;  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

و نبين ان  $U_{n+1}^2 = U_n \times U_{n+2} + (-1)^{n+1}$

لدينا  $U_{n+1} = U_n + U_{n-1}$  ومنه  $U_{n+1} \times U_{n+1} = U_n \times U_{n+1} + U_{n-1} \times U_{n+1}$

فان  $U_{n+1}^2 = U_n \times U_{n+1} + U_n^2 - (-1)^n$

اي  $U_{n+1}^2 = U_n \times \underbrace{(U_{n+1} + U_n)}_{U_{n+2}} - (-1)^n$

وبالتالي  $U_{n+1}^2 = U_n \times U_{n+2} + (-1)^{n+1}$

اذن  $U_n^2 = U_{n-1} \times U_{n+1} + (-1)^n$  ;  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

3- نضع ان  $V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$  ;  $\forall n \in \mathbb{N}$

بين ان  $V_{n+1} - V_n = \frac{(-1)^n}{U_n U_{n+1}}$  ، ثم استنتج نهاية  $V_{n+1} - V_n$

لـ لنبين ان  $V_{n+1} - V_n = \frac{(-1)^n}{U_n U_{n+1}}$

لدينا  $V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$  اي  $V_{n+1} = \frac{U_{n+2}}{U_{n+1}}$

يعني ان  $V_{n+1} - V_n = \frac{U_{n+2}}{U_{n+1}} - \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{U_n \times U_{n+2} - U_{n+1}^2}{U_n U_{n+1}} = \frac{-(-1)^{n+1}}{U_n U_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{U_n U_{n+1}}$

(لان  $U_{n+1}^2 = U_n \times U_{n+2} + (-1)^{n+1}$ )

لـ نستنتج نهاية  $V_{n+1} - V_n$  :

لان  $U_{n+1} \geq n + 1$

لدينا  $\lim_{+\infty} U_n = +\infty$  فان  $\lim_{+\infty} U_{n+1} = +\infty$  (حسب سؤال 1)

وبالتالي  $\lim_{+\infty} U_n \times U_{n+1} = +\infty$

$$\frac{-1}{U_n U_{n+1}} \leq V_{n+1} - V_n = \frac{(-1)^n}{U_n U_{n+1}} \leq \frac{1}{U_n U_{n+1}} : \text{وبمأن}$$

$$\lim_{+\infty} \frac{1}{U_n U_{n+1}} = \lim_{+\infty} \frac{-1}{U_n U_{n+1}} = 0 \text{ ولدينا}$$

$$\lim_{+\infty} V_{n+1} - V_n = 0 \text{ وبالتالي حسب مبرهنة الدركيين فإن}$$