14-2015	فرض رقم 2	2 bac SM

التمرين الأول :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[1,+\infty[$ بما يلي :

$$f(x)=\frac{\arctan\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} \quad ; \quad x>1 \qquad \text{و} \qquad f(1)=1$$

1) أ- بين أن f متصلة على يمين النقطة $x_0=1$

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

2) ليكن X من المجال $]0,+\infty[$ و نضع : $\varphi(t)=t^3\left(arx\tan X-X\right)-X^3\left(\arctan t-t\right)$

أ- بين أن φ قابلة للاشتقاق على المجال $]0,X[$ و أحسب المشتقة $\varphi'(t)$

ب- بين أن $\left(\exists c\in\left]0,X\right[\right) \quad \dfrac{\arctan X-X}{X^3}=\dfrac{-1}{3\left(1+c^2\right)}$

ج- استنتج أن $\lim\limits_{\substack{X\to0\\X>0}}\dfrac{\arctan X-X}{X^3}=-\dfrac{1}{3}$

3) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين النقطة $x_0=1$ ضع $X=\sqrt{x-1}$

4) أ- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن : $\left(\forall X\in\mathbb{R}^+\right) \quad \arctan X\geq\dfrac{X}{1+X^2}$

ب- بين أن $\left(\forall x\in\left]1,+\infty\right[\right) \quad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{(x-1)^3}}\left(\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}-\arctan\sqrt{x-1}\right)$

ج- استنتج أن f تناقصية على $[1,+\infty[$

5) أرسم المنحنى $\left(C_f\right)$

التمرين الثاني :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I=\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ بمايلي : $f\left(x\right)=\sin x$

1) بين أن f تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده

2) لتكن f^{-1} التقابل العكسي للدالة f .

بين أن f^{-1} قابلة للاشتقاق على المجال $]-1,1[$ و أن $\left(f^{-1}\right)'\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) نضع $F\left(x\right)=2f^{-1}\left(\sqrt{x}\right)-f^{-1}\left(2x-1\right)$

أ- بين أن مجموعة تعريف الدالة F هي $D=\left[0,1\right]$

ب- بين أن F قابلة للاشتقاق على $]0,1[$ و أن $F'\left(x\right)=0$

ج- استنتج أن $\left(\forall x\in\left[0,1\right]\right) \quad 2f^{-1}\left(\sqrt{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}+f^{-1}\left(2x-1\right)$