فرض رقم 2

التمرين الأول :

لتكن $(U_n)_n$ متتالية معرفة بما يلي :

$U_n = \sum_{p=0}^{p=2n+1} \frac{n}{n^2+p}$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n

1) بين أن $2-\frac{2}{n+1} \le U_n \le 2+\frac{2}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

2) أ- تحقق أن $\sqrt{n}-\sqrt{n-1} \ge \frac{1}{2n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ب- استنتج أن $\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p} \le 2\sqrt{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

3) نضع $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} U_k$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n

بين أن $2n-4\sqrt{n+1} \le S_n \le 2n+4\sqrt{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

و حدد $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$

التمرين الثاني :

لتكن $(U_n)_n$ متتالية هندسية حدودها غير منعدمة أساسها q .

لكل عدد طبيعي n نضع : $S = U_0+U_1+.....+U_{n-1}$

و $P = U_0 U_1 ....U_{n-1}$ و $T = \frac{1}{U_0}+\frac{1}{U_1}+.......+\frac{1}{U_{n-1}}$

1) بين أن $\frac{S}{T} = U_0^2\ q^{n-1}$

2) استنتج أن $P^2 = \left(\frac{S}{T}\right)^n$

التمرين الثالث :

نعتبر المتتاليتين $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ المعرفتين بما يلي : $U_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ و $V_n = \sum_{k=0}^{k=2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

1) بين أن $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ متحاذيتين

2) نضع $f_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$

أ- بين أن $f_n'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$

ب- أثبت أن $f_{2n+1}(x) \le \arctan x \le f_{2n}(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$

ج- استنتج نهاية كل من المتتاليتين $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$

التمرين الرابع :

لكل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي 3 نضع $f_n(x) = x^n - n(x-1) - 2$ لكل x من $\mathbb{R}^+$

1) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلين u_n و v_n حيث أن $u_n < 1 < v_n$

2) أ- أدرس إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$

ب- أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة

ج- بين أن $\frac{-2}{n} \le u_n - 1 \le \frac{-1}{n}$: $(\forall n \ge 3)$ ثم حدد $\lim_{n\to+\infty} u_n$

3) أ- أدرس رتابة المتتالية $(v_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة

ب- بين أن $v_n > 1+\frac{1}{n}$ $(\forall n \ge 3)$ (نعطي $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ $(\forall n \ge 3)$)

ب- بين أن $(\forall a>0)(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (1+a)^n \ge 1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2$

ج- أحسب $f_n\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ و استنتج أن $v_n < 1+\frac{1}{\sqrt{n}}$ $(\forall n \ge 3)$

د- حدد نهاية المتتالية $(v_n)_n$