ثانوية الجولان التأهيلية بيوكرى	السنة الثانية بكالوريا علوم رياضية	السنة الدراسية : 2010 – 2011	فرض محروس رقم:02 الأستاذ : أحمد مومنى

التمرين رقم 01

سلم التنقيط

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)^2 \left| Arc\tan\frac{1}{x} \right| \quad , \quad x \in \mathbb{R}^* \\ f(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

و (C_f) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

الجزء الأول:

1 – بين أن: $\frac{x}{3} \rangle \frac{x - Arc\tan x}{x^2} \rangle 0 \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$ — 1 ن

2 – a – بين أن: $Arc\tan|x| + Arc\tan\frac{1}{|x|} = \frac{\pi}{2} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^*)$ — 1 ن

b – استنتج أن : $\lim_{x\to 0^+} \frac{(x-1)^2 Arc\tan\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}}{x} = -(1+\pi)$

و أن : $\lim_{x\to 0^-} \frac{-(x-1)^2 Arc\tan\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}}{x} = (1-\pi)$ — 1 ن

3 – a – أحسب النهاية : $\lim_{x\to -\infty} (f(x)+x)$ — 0,5 ن

b– نضع: $t = \frac{1}{x}$

تحقق أن: $f(x) - (x-2) = 2 + (t-2)\frac{Arc\tan t}{t} + \frac{Arc\tan t - t}{t^2} \quad (\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ — 0,75 ن

الجزء الثاني:

1 – أحسب النهايتين : $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ — 1 ن

2 – a – أدرس اتصال الدالة f في النقطة 0 — 0,5 ن

b – أدرس اشتقاق الدالة f في النقطة 0 ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها — 0,5 ن

3 – باستعمال نتائج السؤال 3) من الجزء الأول حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) — 1 ن

4 – لكل x من $\mathbb{R}^*$ نضع : $h(x) = 2Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x-1}{x^2+1}$

a – أدرس تغيرات الدالة h — 1,5 ن

b – استنتج إشارة الدالة h على $\mathbb{R}^*$ — 0,5 ن

c – بين أن: $\begin{cases} (\forall x > 0) \quad f'(x) = (x-1)h(x) \\ (\forall x < 0) \quad f'(x) = (1-x)h(x) \end{cases}$ — 1 ن

d – استنتج جدول تغيرات الدالة f — 0,5 ن

5 – ليكن g قصور الدالة f على المجال $I =]-\infty, 0[$. أتبث أن g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده — 0,5 ن

6 – أنشئ في نفس المعلم المتعامد الممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ المنحنيين $\left(C_f\right)$ و $\left(C_{g^{-1}}\right)$ 2 ن

7– ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث : $0<x<y$ 1,75 ن

بين أن : $f(y)-f(x)<(y-x)(\pi+1)|\alpha-1|$ $\quad\left(\exists\alpha\in]x,y[\right)$

8– لتكن $\left(U_n\right)$ المتتالية العددية المعرفة بالصيغة التالية:

$$\begin{cases} U_0\in\left]\frac{1}{2},1\right[\\ U_{n+1}=\dfrac{f\left(U_n\right)}{2\left(U_n-1\right)}+1 \quad , \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \end{cases}$$

a– بين أن: $U_n\neq 1$ $\quad(\forall n\in\mathbb{N})$ 0,5 ن

b– بين أن : $\left|U_{n+1}-1\right|\leq\frac{\pi}{4}\left|U_n-1\right|$ $\quad(\forall n\in\mathbb{N})$ 0,75 ن

c– استنتج نهاية المتتالية $\left(U_n\right)$ 0,75 ن

التمرين رقم 02

نربط كل عدد حقيقي a غير منعدم بالدالة العددية f_a المعرفة كما يلي:

$$f_a(x)=A\text{rctan}\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) \qquad \left(\forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{a}\right\}\right)$$

1 – أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f_a(x)$ ثم بين أن : $f_a'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{a}\right\}$ 1 ن

2– نفترض أن $a\in\mathbb{R}_-^*$

بين أنه مهما يكن x من $\left]\frac{1}{a},+\infty\right[$ فإن: $f_a(x)=A\text{rctan}\,x+A\text{rctan}\,a$ 1 ن

و أنه مهما يكن x من $\left]-\infty,\frac{1}{a}\right[$ فإن: $f_a(x)=A\text{rctan}\,x+A\text{rctan}\,a+\pi$

3– أ - تحقق أنه مهما يكن x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{a}\right\}$ فإن: $-f_{-a}(-x)=f_a(x)$ 0,25 ن

ب - استنتج أنه إذا كان $a\in\mathbb{R}_+^*$ فإن : 0,75 ن

$$\begin{cases} \left(\forall x>\frac{1}{a}\right) & f_a(x)=Arc\tan(x)+Arc\tan(a)-\pi \\ \left(\forall x<\frac{1}{a}\right) & f_a(x)=Arc\tan(x)+Arc\tan(a) \end{cases}$$

AHMED MOUMNI