فرض محروس

المستوى 2 باك ع ر — ثانوية أنيس

مسألة :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $f(x) = xe^{-x} + e^{-x}$

الجزء I :

1- أحسب $\lim_{+\infty} f(x)$ — 1

2- أدرس تغيرات f على $\mathbb{R}^+$ وحدد جدول تغيراتها على $\mathbb{R}^+$ — 1,5

3- حدد دالة أصلية للدالة $x \longmapsto xe^{-x}$ — 1,5

4- إستنتج أن : $\forall x \geqslant 0 \quad 0 \leqslant xe^{-x} \leqslant 1$ و $f(2x) - f(x) < 0$ — 1,5

5- بَيِّن أن : $\forall u \in [0,1] \quad 1-u \leqslant \frac{1}{1+u} \leqslant 1 - \frac{1}{2}u$ — 1

6- إستنتج : $\forall t \geqslant 0 \quad , \quad 1 - te^{-t} \leqslant \frac{1}{1+te^{-t}} \leqslant 1 - \frac{1}{2}te^{-t}$ — 1

الجزء II :

نعتبر الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{1+te^t}\,dt$

1- أثبت أن : $\forall x \geqslant 0 \quad , \quad x + f(2x) - f(x) \leqslant F(x) \leqslant x + \frac{1}{2}(f(2x) - f(x))$ — 2,5

2- إستنتج : $\lim_{+\infty} F(x)$ و $\lim_{+\infty} (F(x) - x)$ — 1,5

3- بين أن : $\forall x > 0 \quad , \quad F(x) \leqslant x$ — 1,5

4- بين أن F ق.ش. على $\mathbb{R}^+$ و أن : — 1,5

$$F'(x) = \frac{e^{2x} + 2x(e^x - 1)}{(e^{2x} + 2x)(1 + xe^x)} \quad , \forall x \geqslant 0$$

5- إستنتج تغيرات F على $\mathbb{R}^+$ — 1

6- أنشئ $\mathcal{C}_F$ — 1,5

7- أ- حدد دالة أصلية للدالة $x \longmapsto f(2x) - f(x)$ — 1,5

ب- أعط تأطيرا لمساحة الحيز من المستوى المحصور بين $\mathcal{C}_F$ — 1,5

والمستقيمات $x=1$ و $x=0$ و $y=0$

الجزء IV

أحسب نهاية المتتالية (l_n) حيث : $l_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$ — 1

Bonne année 2012