فرض محروس رقم 3

التمرين الأول :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I=[0,1]$ بما يلي : $f(x)=\frac{1}{2}\arctan(1-x)$

1) أ- أدرس منحى تغيرات الدالة f و بين أن $f(I)\subseteq I$

ب- بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α

ج- بين أن $|f(x)-f(y)|\leq\frac{1}{2}|x-y| \quad \left(\forall(x,y)\in I^2\right)$

2) نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0=0$ و $U_{n+1}=f(U_n)$

أ- بين أن $0\leq U_n\leq 1 \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

ب- نضع $V_n=U_{2n}$ و $W_n=U_{2n+1}$ لكل عدد طبيعي n

ب1) بين أن $V_n\leq\alpha\leq W_n \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

ب2) أدرس رتابة كل من $(V_n)_n$ و $(W_n)_n$

ب3) بين أن $W_{n+1}-V_{n+1}\leq\frac{1}{4}(W_n-V_n) \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

ب4) بين أن $(V_n)_n$ و $(W_n)_n$ متحاذيتين و حدد نهايتهما المشتركة

3) استنتج أن $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين الثاني :

نعتبر العدد العقدي $z_0=1+i\sqrt{3}$

1) أ- حدد الشكل المثلثي للعدد z_0

ب- بين أن $z_0^n+\left(\overline{z_0}\right)^n=2^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

2) نضع $Z=1-\sqrt{3}-i\left(1+\sqrt{3}\right)$

أ- بين أن $\overline{Z}=\sqrt{2}\ z_0\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

ثم حدد الشكل المثلثي للعدد Z

ب- استنتج قيمة كل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$; $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

التمرين الثالث :

1) بين أن $\sum_{k=1}^{k=n}k\,i^{k-1}=\frac{1}{2}\left(i-ni^n-(n+1)i^{n+1}\right)$

2) استنتج قيمة كل من : $S=\sum_{k=1}^{k=m}(-1)^k(2k)$

و $S'=\sum_{k=0}^{k=m}(-1)^k(2k+1)$

التمرين الرابع :

ليكن a عدد من $]0,1[$ و n عدد طبيعي غير منعدم . نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$f_n(x)=\left(\sum_{k=1}^{k=n}x^k\right)-a$$

1) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_n و أن $0<x_n<1$

2) بين أن $(x-1)\,f_n(x)=x^{n+1}-(a+1)x+a \quad \left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right)$

3) أ- بين أن $f_{n+1}(x)>f_n(x) \quad (\forall x\in\,]0,1[)$

ب- استنتج أن المتتالية $(x_n)_n$ تناقصية و أنها متقاربة

ج- بين أن $\lim_{n\to+\infty}x_n^n=0$ و حدد نهاية المتتالية $(x_n)_n$ بدلالة a