مسألة (10 نقط)

الجزء(A) : [I 1) بين أن :

$$(\forall x \in]-1,+\infty[- \{0\}) : \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t}dt = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\frac{1}{2}$$ (0.5 نقطة)

2) بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ x-1-x\ln x \leq 0$ (0.5 نقطة)

[II لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1} \quad ; \quad x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

1) أ- بين أن $(\forall x \in]-1,+\infty[- \{0\}) : \dfrac{x}{3(x+1)} \leq \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{1+t}dt \leq \dfrac{x}{3}$ (0.75 ن)

ب- استنتج أن f قابلة للاشتقاق في النقطة 1 و أن $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$ (0.5 ن)

2) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) (0.75 نقطة)

3) أحسب المشتقة $f'(x)$ و أنجز جدول تغيرات الدالة f (0.75 نقطة)

4) أرسم المنحنى (C_f) (0.75 نقطة)

الجزء(B) : لتكن F الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} f(t)\,dt \quad x \neq 0 \ ; \ x \neq 1 \\ F(0) = 0 \quad ; \quad F(1) = 0 \end{cases}$$

1) أ- بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\})\ \dfrac{2x\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq x\ln x$ (0.75 نقطة)

ب- أدرس اتصال وقابلية اشتقاق F على يمين 0 (0.5 نقطة)

ج- أدرس قابلية اشتقاق F في النقطة 1 ((0.75 نقطة))

2) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ (0.5 نقطة)

ب- بين أن $\left(\forall x \in \left]1,+\infty\right[\right) \ln x\ \ln(x+1) \leq F(x) \leq 2\ln x\ \ln(x+1)$ 0.75 ن

ج- بين أن المنحنى Γ_F يقبل عند $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل(0.75 ن)

3) بين أن F قابلة للاشتقاق على $D = \left]0,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$ (1 نقطة)

و أن $(\forall x \in D)\ F'(x) = \dfrac{(3x-1)\ln x}{x^2-1}$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة F

4) أرسم المنحنى Γ_F (نأخذ $F\left(\frac{1}{3}\right) = -0,44$ و Γ_F يقبل نقطة انعطاف وحيدة في $I(1,9\ ;\ 1,2)$) (0.5 نقطة)

تمرين (3 نقط)

لكل عدد عقدي z يخالف i . نضع $f(z) = \dfrac{iz}{z-i}$

1) أ- بين أن $(f(z) \in i\mathbb{R}) \Leftrightarrow (z \in i\mathbb{R})$ (0.5 نقطة)

ب- حدد المجموعة : $(E_1) = \{M(z)/\ f(z) \in \mathbb{R}\}$ (0.5 نقطة)

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $f(z) = 1-2z$ (0.5 نقطة)

3) نضع $z - i = re^{i\alpha}$

أ- حدد الشكل المثلثي للعدد $f(z)-i$ (0.5 نقطة)

ب- حدد و أرسم المجموعتين $\zeta = \{M(z)/\ |f(z)-i| = \sqrt{2}\}$

و $D = \left\{M(z)/\ \arg(f(z)-i) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]\right\}$ (1 نقطة)

ذ : الماثـــي

تصحيح الفرض الأول

الأسدس II .

السنة الدراسية 2010 - 2011

تمرين (المسألة) .

=> جزء I .

لنبين أن: $\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t}dt = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\frac{1}{2}$

لدينا

$\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{t^2}{1+t}dt = \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2-1+1}{1+t}dt$

$=\frac{1}{x^2}\int_0^x t-1+\frac{1}{1+t}dt$

$=\frac{1}{x^2}\int_0^x t-1dt+\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{1}{t+1}dt.$

$=\frac{1}{x^2}\left[\frac{t^2}{2}-t\right]_0^x+\frac{1}{x^2}\left[\ln(t+1)\right]_0^x$

$=\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)+\frac{1}{x^2}\ln(x+1)$

$=\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\frac{1}{2}.$

- لنبين أن $x-1-x\ln x\le 0$

نضع الدالة

$h(x)=x-1-x\ln x$

$h'(x)=1-\ln x-1=-\ln x.$

x	0		1		$+\infty$
$h(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

حسب جدول التغيرات

$\forall x>0 \quad h(x)<h(1)$

إذا $h(x)<0$

إذن $x-1-x\ln x\le 0$

الجزء II .

1) لنبين أن $\forall x\in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$

$\frac{x}{3(x+1)}\le\int_0^x\frac{t^2}{1+t}dt\le\frac{x}{3}$

إذا كان $x>0$

لدينا $0<t<x$

$1<t+1<x+1$

$\frac{1}{x+1}<\frac{1}{t+1}<1$

يعني $\frac{t^2}{x+1}<\frac{t^2}{t+1}<t^2$

$\forall x>0\ \int_0^x\frac{t^2}{x+1}dt<\int_0^x\frac{t^2}{t+1}dt<\int_0^x t^2dt$

$\frac{1}{x+1}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x<\int_0^x\frac{t^2}{t+1}dt<\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x$

$\frac{x^3}{3x^2(x+1)}<\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{t^2}{t+1}dt<\frac{x^3}{3}\times\frac{1}{x^2}$

إذن $\frac{x}{3(x+1)}<\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{t^2}{t+1}dt<\frac{x}{3}$

- إذا كان $x\in]-1,0[$

لدينا $x\le t\le 0$

$x+1\le t+1\le 1$

$1\le\frac{1}{t+1}\le\frac{1}{x+1}$

إذا $t^2\le\frac{t^2}{t+1}\le\frac{t^2}{x+1}$

و $\forall x\in]-1,0[\quad x<0$

$\int_x^0 t^2dt\le\int_x^0\frac{t^2}{t+1}dt\le\int_x^0\frac{t^2}{x+1}dt$

$\left[\frac{t^3}{3}\right]_x^0\le\int_x^0\frac{t^2}{t+1}\le\frac{1}{x+1}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x$

$$\left(-\frac{x^3}{3}\right)\cdot\frac{1}{x^2} \le -\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t}\,dt \le \frac{-x^3}{3(x+1)}\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{x}{3(x+1)} < \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t}\,dt \le \frac{x}{3}$$

وعليه $\forall x\in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$

لدينا

$$\boxed{\frac{x}{x+1} < \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t}\,dt < \frac{x}{3}}$$

لتكن الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بمايلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1} \\ f(1)=1 \end{cases}$$

ب- لنبين أن f قابلة للإشتقاق في 1 و $f'(1)=-\frac{1}{2}$

لدينا $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}$

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}.$$

نضع $X=x-1$ تصبح

$$\lim_{X\to0}\frac{\ln(X+1)-X}{X^2}$$

وحسب ماسبق.

$$\frac{\ln(X+1)-X}{X^2}=\frac{1}{X^2}\int_0^X\frac{t^2}{1+t}\,dt-\frac{1}{2}$$

إذن

$$\frac{X}{3(X+1)}-\frac{1}{2}<\frac{\ln(X+1)-X}{X^2}<\frac{X}{3}-\frac{1}{2}.$$

نلاحظ أن

$$\lim_{X\to0}\frac{X}{3(X+1)}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{X\to0}\frac{X}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

إذن $\lim_{X\to0}\frac{\ln(X+1)-X}{X^2}=-\frac{1}{2}$

وبالتالي $\lim_{x\to1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}=-\frac{1}{2}.$

وبالتالي f قابلة للإشتقاق في 1 بحيث $f'(1)=-\frac{1}{2}.$

ج- الفروع اللانهائية لـ C_f.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\cdot\frac{x}{x-1}=0$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}=1$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x-1}\cdot\ln x=+\infty$$

لأن $\lim_{x\to0}\frac{1}{x-1}=-1$ و $\lim_{x\to0}\ln x=-\infty.$

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)'=\frac{\frac{1}{x}(x-1)-\ln x}{(x-1)^2}=\frac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}=\frac{x-x\ln x-1}{x(x-1)^2}=\frac{h(x)}{x(x-1)^2}\le0$$

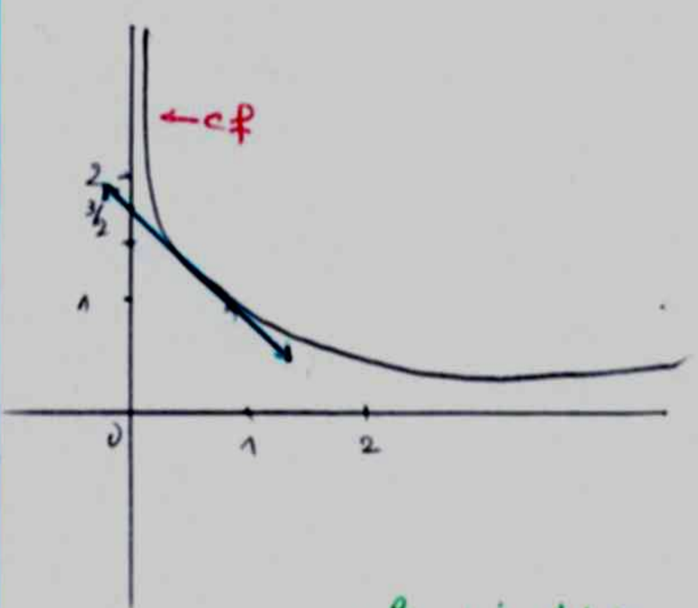
لأن $\forall x>0\quad h(x)\le0.$

جدول التغيرات

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

4- إنشاء المنحنى C_f.

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ مماس المنحنى عند 1.



⇐ الجزء B.

$I=[0,+\infty[$

$$\begin{cases} F(x)=\int_x^{x^2} f(t)\,dt & x\neq 0,\ x\neq 1 \\ F(0)=0,\ F(1)=0 \end{cases}$$

لنبين أن $\frac{2x\ln x}{x+1}\le F(x)\le x\ln x$

← $x>1$

$x<t<x^2$

← f دالة متناقصة.

$f(x^2)<f(t)<f(x)$

$$\frac{2\ln x}{x^2-1}<\frac{\ln t}{t-1}<\frac{\ln x}{x-1}$$

$\forall (x,x^2)\in]0,+\infty[\setminus\{1\}$ $\quad x<x^2$

$$\frac{2\ln x}{x^2-1}\int_x^{x^2}1\,dt<\int_x^{x^2}\frac{\ln t}{t-1}dt<\int_x^{x^2}1\,dt\times\frac{\ln x}{x-1}$$

$$\frac{2\ln x}{x^2-1}(x^2-x)<F(x)<\frac{\ln x}{x-1}(x^2-x)$$

$$\frac{2x\ln x}{x+1}<F(x)<x\ln x$$

← $x\in]0,1[$

لدينا $x^2<t<x$

وبما أن f متناقصة.

$f(x)<f(t)<f(x^2)$

$$\frac{\ln x}{x-1}<\frac{\ln t}{t-1}<\frac{2\ln x}{x^2-1}$$

$\forall(x,x^2)\in]0,1[$ $\quad x^2<x$

$$\frac{\ln x}{x-1}\int_{x^2}^{x}1\,dt\le\int_{x^2}^{x}\frac{\ln t}{t-1}dt\le\frac{2\ln x}{x^2-1}\int_{x^2}^{x}1\,dt$$

$$\frac{\ln x}{x-1}(x-x^2)\le -F(x)\le\frac{2\ln x}{x^2-1}(x-x^2)$$

$$\frac{2x\ln x}{x+1}\le F(x)\le x\ln x$$

وعليه $\forall x\in]0,+\infty[$ لدينا

$$\frac{2x\ln x}{x+1}\le F(x)\le x\ln x$$

ب- اتصال وقابلية اشتقاق F في الصفر

$\lim_{x\to0}\frac{2x\ln x}{x+1}=0$

لأن $\lim_{x\to0}x\ln x=0$

اذا $\lim_{x\to0}F(x)=0=F(0)$

⇐ F متصلة على يمين 0.

و $\forall x\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\}$

$$\frac{2\ln x}{x+1}\le\frac{F(x)}{x}\le\ln x$$

$\lim_{x\to0}\frac{2\ln x}{x+1}=-\infty$

$\lim_{x\to0}\ln x=-\infty$

اذن $\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{x}=-\infty$

⇐ F غير قابلة للاشتقاق في الصفر.

$\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x\ln x}{x+1} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x}{x+1}\times \ln x$

$= +\infty$

بحيث

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x}{x+1} = 2$

ب - لنبين ان $\forall x>1$

$\ln(x+1)\ln x < F(x) < 2\ln(x+1)\ln x$

لدينا

$x < t \leq x^2$

$\ln x < \ln t < 2\ln x$

$\frac{\ln x}{t-1} \leq \frac{\ln t}{t-1} \leq \frac{2\ln x}{t-1}$

$\forall (x,x^2)\in]1,+\infty[^2 \quad x<x^2$

و بالتالي .

$\ln x\int_x^{x^2}\frac{1}{t-1}dt \leq \int_x^{x^2}\frac{\ln t}{t-1} \leq 2\ln x\int_x^{x^2}\frac{1}{t-1}dt$

$\ln x[\ln(t-1)]_x^{x^2} \leq F(x) \leq 2\ln x[\ln(t-1)]_x^{x^2}$

$\ln x\left(\ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)\right) \leq F(x) \leq 2\ln x\left(\ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)\right)$

$\ln x\ln(x+1) \leq F(x) \leq 2\ln x\ln(x+1)$

ج - الفرع الشلجمي لـ C_F

$\frac{\ln x.\ln(x+1)}{x} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{2\ln x\ln(x+1)}{x}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x.\ln(x+1)}{x}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$

لدينا اذا كان $x>1$

$\frac{2x\ln x}{x+1} < F(x) < x\ln x.$

$\frac{2x\ln x}{(x^2-1)} \leq \frac{F(x)}{x-1} \leq \frac{x\ln x}{x-1}$

$\frac{2x\ln x}{x^2-1} \leq \frac{F(x)-F(1)}{x-1} \leq \frac{x\ln x}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2x\ln x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2x}{x+1}\times\frac{\ln x}{x-1}$

$= 1$

لان $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x}{x+1} = 1$ و $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x\ln x}{x-1} = 1$

اذن $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = 1.$ ①

اذا كان $0<x<1$

$\frac{x\ln x}{x-1} < \frac{F(x)}{x-1} < \frac{2x\ln x}{x^2-1}$

بالمثل

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x\ln x}{x-1} = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{2x\ln x}{x^2-1} = 1$

اذن $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = 1$ ②

من 1 و 2 لدينا F قابلة للاشتقاق على يمين 1 و يسار 1

و $F'_d(1) = F'_g(1) = 1$

$\Leftarrow$ F قابلة للاشتقاق في 1

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} \times \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{2\ln(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}} \times \left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0 \;,\; \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = 0$$ و

إذن

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)\cdot\ln(x+1)}{x} = 0$$

ومن جهة ثانية

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x \ln(x+1)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2\left(\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{2\ln(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}} \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right) = 0$$

إذن $$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$$

وعليه C_F يقبل فرعا شلجميا نحو محور الفواصل.

3. قابلية اشتقاق F.

$t \xrightarrow{f} \frac{\ln t}{t-1}$ مستمرة إذن تقبل دالة أصلية G بحيث

$F(x) = G(x^2) - G(x)$.

$x \mapsto G(x)$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$.

$x \mapsto x^2$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ ، $u(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$

$x \mapsto G\circ u$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$

إذن F قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$.

$$F'(x) = 2x f(x^2) - f(x)$$

$$= 2x \times \frac{2\ln(x)}{x^2-1} - \frac{\ln x}{x-1}$$

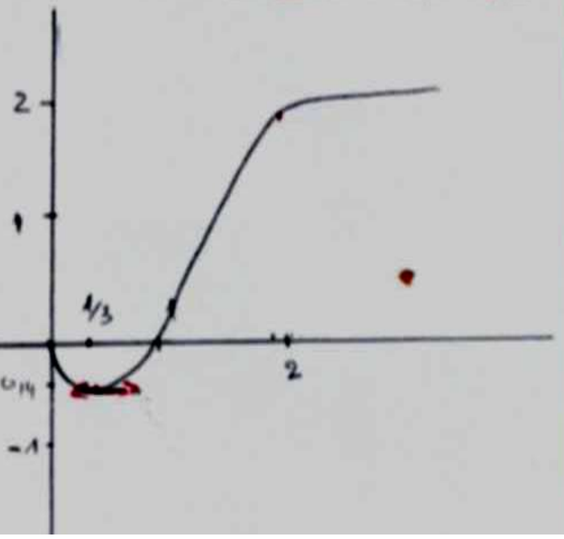
$$= \frac{4x\ln x - x\ln x - \ln x}{x^2-1}$$

$$= \frac{\ln x}{x^2-1}(3x-1).$$

← جدول تغيرات F.

x	0		$1/3$		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$F'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
$F(x)$	0	$\searrow$	-0.14	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

← المنحنى.



تمرين 2

$$f(z) = \frac{iz}{z-i}$$

لنبين ان: $f(z) \in i\mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}$

لدينا

$f(z) \in i\mathbb{R}$

تعني

$\frac{iz}{z-i} = \frac{i\bar{z}}{\bar{z}+i}$

$\iff iz(\bar{z}+i) = i\bar{z}(z-i)$

$\iff iz\bar{z} - z = i\bar{z}z + \bar{z}$

$\iff z + \bar{z} = 0$

$\iff Ré(z) = 0$

$\iff z \in i\mathbb{R}.$

ب- تحديد المجموعة $E_1 = \{M(z) / f(z) \in \mathbb{R}\}$

$f(z) \in \mathbb{R} \iff \frac{iz}{z-i} = \frac{-i\bar{z}}{\bar{z}+i}$

تعني

$\frac{iz}{z-i} = \frac{-i\bar{z}}{\bar{z}+i}$

$\iff iz(\bar{z}+i) = -i\bar{z}(z-i)$

$\iff iz\bar{z} - z = -i\bar{z}z - \bar{z}$

$\iff 2iz\bar{z} - (z-\bar{z}) = 0$

$\iff 2i|z|^2 - 2i\,Im(z) = 0$

نضع $z = x + iy$

$\iff x^2 + y^2 - y = 0$

$\iff x^2 + (y - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

اذن E_1 هي الدائرة التي مركزها $O(0, \frac{1}{2})$ وشعاعها $r = 1/2$.

محرومة من $A(0,1)$.

2- حل المعادلة $f(z) = 1 - 2z$

$f(z) = 1 - 2z$

تعني $\frac{iz}{z-i} = 1 - 2z$

$iz = (1-2z)(z-i)$

$iz = z - i - 2z^2 + 2iz$

$0 = z + 2iz - 2z^2 - iz - i$

وبالتالي:

$2z^2 - iz - z + i = 0$

$2z^2 - z(1+i) + i = 0$

من جهة أخرى:

$\Delta = 2i - 8i = -6i = 3(-2i)$

$= (\sqrt{3}(1-i))^2$

وعليه:

$z_1 = \frac{1+i-\sqrt{3}+\sqrt{3}i}{4}$

$= \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$

$z_2 = \frac{1+i+\sqrt{3}-\sqrt{3}i}{4}$

$= \frac{1+\sqrt{3}}{4} + i\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right).$

$S = \left\{ \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4} + i\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)\right), \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4} + i\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)\right) \right\}.$

ب- $f(z) - i = \frac{iz - iz - 1}{z-i} = \frac{-1}{z-i}$

$= -\frac{1}{r}e^{-i\alpha}$

$= \frac{e^{i(\pi-\alpha)}}{r}$

$M(z) \in \mathcal{S} \iff |f(z) - i| = \sqrt{2}$

$\iff \frac{1}{r} = \sqrt{2}$

$\iff r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\iff |z - i| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

نضع $A(i)$

$\iff AM = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\mathcal{S}$ هي الدائرة التي مركزها A وشعاعها $\sqrt{2}$

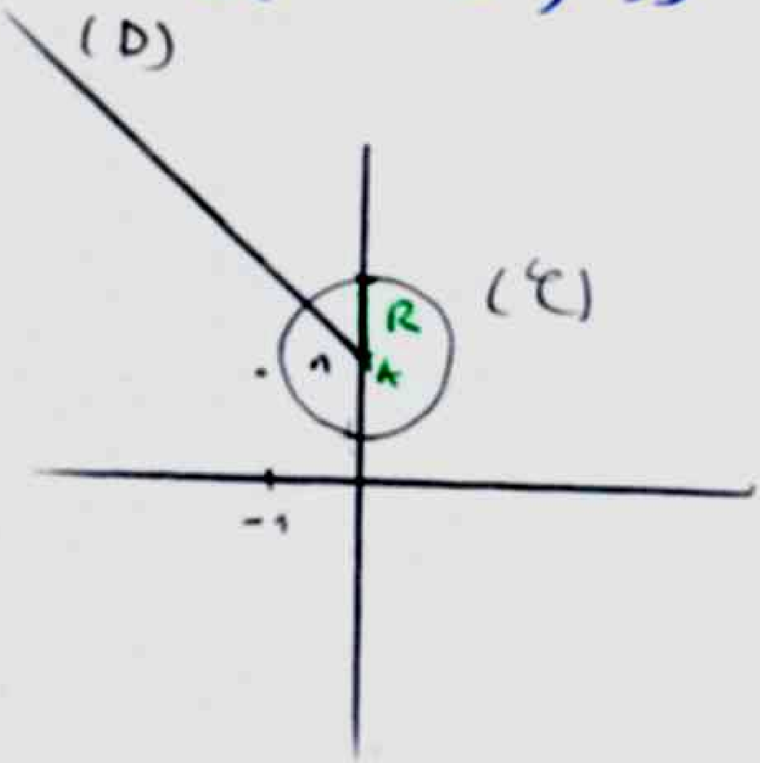
يعني

$$\Rightarrow \pi - \alpha \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\Rightarrow \alpha \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi].$$

$$\Rightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \frac{3\pi}{4} [2\pi]$$

اذن: (D) نصف المستقيم الذي معامله الموجه $tg\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$ و المحدود من $A(i)$.



تم انجازه تحت إشراف
الاستاذ: لمانني
من طرف التلميذة: محرد فاطمة الزهراء.

2012 - 2013.