مسألة (16 نقطة)

الجزء (1) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(0)=1 \quad \text{و} \quad f(x)=\frac{\arctan x}{x} \quad ; \quad x\neq 0$$

1) بين أن f زوجية و أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (1 ن)

2) أ- بين أن $(\forall t\in\mathbb{R}^{+})\quad 1-t^2\leq\frac{1}{1+t^2}\leq 1$ (0.5 ن)

و استنتج أن $(\forall x\in\mathbb{R}^{+})\quad x-\frac{x^3}{3}\leq acr\tan x\leq x$ (0.5 ن)

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين $x_0=0$ (0.5 ن)

3) أ- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن $(\forall x\in\mathbb{R}^{+})\quad \arctan x\geq\frac{x}{1+x^2}$

ب- أحسب المشتقة $f'(x)$ و أدرس تغيرات الدالة f (0.5 ن)

الجزء (2) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$g(0)=1 \quad \text{و} \quad g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \quad ; \quad x\neq 0$$

1) بين أن الدالة g زوجية (0.5 ن)

2) أ- بين أن $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\quad 1-g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x (1-f(t))\,dt$ (0.5 ن)

ب- استنتج أن g متصلة على يمين $x_0=0$ (1 ن)

ج- بين أن g قابلة للاشتقاق على يمين $x_0=0$ و أن $g'_d(0)=0$ (0.5 ن)

3) أ- بين أن $(\forall x\in[1,+\infty[)\quad 0\leq\int_1^x f(t)\,dt\leq\frac{\pi}{2}\ln x$ (0.5 ن)

ب- استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ (1 ن)

4) أ- بين أن g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

و أن $x^2g'(x)=\arctan x-\int_0^x f(t)\,dt$ لكل x من $]0,+\infty[$ (1) (1ن)

ب- نضع $h(x)=x^2g'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$.

تحقق أن $x\,h'(x)=\frac{x}{1+x^2}-\arctan x$ لكل x من $]0,+\infty[$ (0.5 ن)

ج- استنتج أن $g'(x)<0$ لكل x من $]0,+\infty[$ ثم ضع جدول تغيرات g (1ن)

5) أرسم منحنى الدالة g (0.5 ن)

الجزء (3)

1) أ- بين أن $f(x)\leq g(x)\leq 1\quad(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\quad(2)$ (1 ن)

ب- استنتج أن $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\quad |g'(x)|\leq\frac{1}{x}(1-f(x))$ (1 ن)

ج- تحقق أن $(\forall x\in\mathbb{R}^{*})\quad \frac{1}{x}(1-f(x))=\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{t^2}{1+t^2}\,dt$ (0.5 ن)

2) أ- بين أن $(\forall t\in\mathbb{R}^{+*})\quad 0\leq\frac{t}{1+t^2}\leq\frac{1}{2}$ (0.5 ن)

ب- استنتج أن $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\quad |g'(x)|\leq\frac{1}{4}$ (0.5 ن)

3) بين أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل في المجال $[0,1]$ حلا وحيدا α (0.5 ن)

4) نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي : $u_0=0$ و $u_{n+1}=g(u_n)$

أ- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0\leq u_n\leq 1$ (0.5 ن)

ب- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad |u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{4}|u_n-\alpha|$ (0.5 ن)

ج- استنتج أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها (0.5 ن)

أسئلة مستقلة (3 نقط)

1) حدد نهاية المتتالية $(U_n)_{n>0}$ المعرفة بما يلي : $U_n=\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{k=n}k^p$

2) ليكن Z و Z' من $\mathbb{C}$. بين أن $|Z+Z'|^2\leq(1+|Z|^2)(1+|Z'|^2)$

3) ليكن Z عدد عقدي بحيث $|Z|=1$ بين أن $|1+Z|\geq 1$ أو $|1+Z^2|\geq 1$

تصحيح الغرض

"2" الأسدس "2"

الجزء (1)

1) لدينا: $D_f = \mathbb{R}$

اذن $(x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R})$

و $x \neq 0$: $f(-x) = \frac{\arctan(-x)}{-x} = \frac{-\arctan(x)}{-x}$

$= f(x)$

(لأن: $t \mapsto \arctan(t)$ دالة فردية).

⟵ اذن الدالة f دالة زوجية.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(x)}{x} = 0$$

(لأن $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$)

---

2) $(\forall t \in \mathbb{R}^+):\ t^4 \geq 0 \Rightarrow -t^4 \leq 0$

$\Rightarrow 1 - t^4 \leq 1$

وحيث: $1 - t^4 = (1-t^2)(1+t^2)$

و $(1+t^2 > 0)$،

اذن $(1-t^2)(1+t^2) \leq 1$

أي ① $\left(1 - t^2 \leq \frac{1}{1+t^2}\right)$

ولدينا أيضا $(\forall t \in \mathbb{R}^+)\ t^2+1 \geq 1$

اذن ② $\left(\frac{1}{t^2+1} \leq 1\right)$

② و ① $\Rightarrow 1 - t^2 \leq \frac{1}{t^2+1} \leq 1$.

- لدينا $(\forall t \in \mathbb{R}^+)\ 1 - t^2 \leq \frac{1}{t^2+1} \leq 1$

$$(x>0)\ \int_0^x (1-t^2)\,dt \leq \int_0^x \frac{1}{t^2+1}\,dt \leq \int_0^x dt$$

$$\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^x \leq \left[\text{Arct}(t)\right]_0^x \leq [t]_0^x$$

أي $x - \frac{x^3}{3} \leq \text{Arct}(x) \leq x$

ب. لنحسب $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

أي: $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-1}{x-0}$

أي $\lim_{x\to 0^+} \frac{\text{Arctan}(x) - x}{x^2}$

ولدينا $(\forall t \geq 0)\ t - \frac{t^3}{3} \leq \text{Arct}(t) \leq t$

إذن $-\frac{x^3}{3} \leq \text{Arct}(x) - x \leq 0$

أي $-\frac{x}{3} \leq \frac{\text{Arct}(x) - x}{x^2} \leq 0$

وحيث $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{-x}{3}\right) = 0$

اذن $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

---

3) أ- نعتبر $t \overset{f}{\mapsto} \text{Arct}(t)$

f دالة متصلة على $[0,x]$ وقابلة للاشتقاق على $]0,x[$. اذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية.

$(\exists c \in]0,x[)\ \text{Arct}(x) - \text{Arct}(0) = (x-0)\, f'(c)$

أي $\text{Arct}(x) = x\, f'(c)$

وحيث: $f'(c) = \frac{1}{1+c^2}$.

و $0 \leq c \leq x \Rightarrow 1 \leq c^2+1 \leq x^2+1$

أي $\frac{1}{1+c^2} \geq \frac{1}{x^2+1}$

أي $(x>0)\ \frac{x}{1+c^2} \geq \frac{x}{x^2+1}$

أي $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ \text{Arct}(x) \geq \frac{x}{x^2+1}$

ب - لدينا f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$

و $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $f'(x) = \dfrac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)x - \text{Arct}(x)}{x^2}$

$$= \frac{x - (1+x^2)\,\text{Arct}(x)}{(1+x^2)\,x^2}$$

. لدينا $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $\arctan(x) \geq \dfrac{x}{x^2+1}$

أي $x - \text{Arctan}(x)(x^2+1) \leq 0$

أي $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$: $f'(x) \leq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$0 \nearrow$	1	$\searrow 0$

(لأن الدالة f دالة زوجية)

الجزء (2).

1) لدينا ، $D_g = \mathbb{R}$

اذن $(x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R})$

أي $x \neq 0$ $g(-x) = \dfrac{1}{(-x)}\displaystyle\int_0^{(-x)} f(t)\,dt$

نضع : $(-t = u)$ أي $(dt = -du)$

و $\begin{cases} t = 0 \Rightarrow u = 0 \\ t = x \Rightarrow u = x \end{cases}$

اذن $g(-x) = \dfrac{-1}{x}\displaystyle\int_0^x -f(-u)\,du$

وبما أن الدالة f دالة زوجية $(f(x) = f(-x))$

اذن $g(-x) = \dfrac{-1}{x}\displaystyle\int_0^x -f(u)\,du$

$$= \frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,du = g(x)$$

الدالة g دالة زوجية

2) أ. لدينا $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x (1-f(t))\,dt$

$$= \frac{1}{x}\left[\int_0^x 1\,dt - \int_0^x f(t)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{x}\left[[t]_0^x - \int_0^x f(t)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{x}\left[x - \int_0^x f(t)\,dt\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$

$$= 1 - g(x)$$

اذن $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})$ $1 - g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x (1-f(t))\,dt$

2) ب. لدينا حسب (جزء I - 3) ب)

$(\forall t \in \mathbb{R}^+)$ $\text{arct}(t) \geq \dfrac{t}{1+t^2}$

$(t>0)$ $\dfrac{\text{arct}(t)}{t} \geq \dfrac{1}{1+t^2}$

يعني $f(t) \geq \dfrac{1}{1+t^2}$

أي $1 - f(t) \leq 1 - \dfrac{1}{1+t^2}$

$x>0$ $\displaystyle\int_0^x (1-f(t))\,dt \leq \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt$

$x>0$ $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x (1-f(t))\,dt \leq \dfrac{1}{x}(x - \text{Arct}(x))$

وبما أن $(\forall t \in \mathbb{R})$ $0 \leq f(t) \leq 1$

وذلك حسب سؤال ، (3 ب)

أي ، $1 - f(t) \geq 0$

أي $\Rightarrow 0 \leq \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x (1-f(t))\,dt \leq 1 - \dfrac{\text{Arct}(x)}{x}$

أي $0 \leq 1 - g(x) \leq 1 - f(x)$

، $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} 1 - f(x) = 1 - 1 = 0 \\ 1 - g(x) \geq 0 \end{array}\right\}$ و

اذن $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 1 = g(0)$

أي أن g متصلة عند $x = 0$

2- لنحسب $\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)-1}{x}$

- لدينا $0\le 1-g(x)\le 1-f(x)$

أي $f(x)-1\le g(x)-1\le 0$

$(x>0)$ $\frac{f(x)-1}{x}\le\frac{g(x)-1}{x}\le 0$

(1) $\frac{\text{Arct}(x)-x}{x^2}\le\frac{g(x)-1}{x}\le 0.$

$\text{arct}(x)\ge\frac{x}{1+x^2}\Longrightarrow \text{Arct}(x)-x\ge\frac{-x^3}{1+x^2}.$

أي (2) $\frac{\text{Arct}(x)-x}{x^2}\ge\frac{-x^2}{1+x^2}$

إذن من (1) و (2) نستنتج $\frac{-x^2}{1+x^2}\le\frac{g(x)-1}{x}\le 0$

و $\lim_{x\to0^+}\frac{-x^2}{1+x^2}=0$ $\Longrightarrow \lim_{x\to0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=0$

إذن g قابلة للاشتقاق على يمين 0 و $g'_d(0)=0$

وحسب $1-\frac{t^2}{3}\le f(t)\le 1$

$\left[t-\frac{t^3}{9}\right]_0^1\le\int_0^1 f(t)\,dt\le 1$

$1-\frac{1}{9}\le\int_0^1 f(t)\,dt\le 1$

أي $(x>0)$ $\frac{8}{9x}\le\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt\le\frac{1}{x}$

إذن: (1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt=0$

وحسب $0\le\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt\le\frac{\pi}{2x}\ln(x)$

إذن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt=0$

(لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{2x}\ln(x)=0$)

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$

لدينا $(\forall t\in[1,+\infty[)\ 0\le \text{arct}(t)\le\frac{\pi}{2}$

أي $0\le\frac{\text{arct}(t)}{t}\le\frac{\pi}{2t}$ $\quad t>0$

$(x\ge1)$ $0\le\int_1^x\frac{\text{arct}(t)}{t}\,dt\le\int_1^x\frac{\pi}{2t}\,dt$

$0\le\int_1^x f(t)\,dt\le\left[\frac{\pi}{2}\ln(t)\right]_1^x$

$0\le\int_1^x f(t)\,dt\le\frac{\pi}{2}\ln(x).$

ومنه النتيجة.

---

3) ب- لدينا $g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$

$=\frac{1}{x}\left(\int_0^1 f(t)\,dt+\int_1^x f(t)\,dt\right)$

$=\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$

---

4. أ) $x\overset{u}{\mapsto}\frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

وحسب $f(t)$ متصلة على $\mathbb{R}^{+*}$ إذن تقبل دالة أصلية F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

أي $\int_0^x f(t)\,dt=F(x)-F(0)$

أي $x\overset{v}{\mapsto}\int_0^x f(t)\,dt$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

إذن: $x\overset{u.v}{\mapsto}g(x)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

$g'(x)=\frac{-1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt+\frac{1}{x}f(x)$

$=\frac{-1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt+\frac{1}{x}\left(\frac{\text{Arctan}(x)}{x}\right)$

$x^2g'(x)=\text{Arct}(x)-\int_0^x f(t)\,dt$

الجزء (3)

① أ. بين أن $\forall x \in \mathbb{R}_+^* ;\ f(x) \le g(x) < 1$

لدينا حسب السؤال 3-أ- الجزء (1) : $x>0$

$$\frac{\arctan(t)}{t} \ge \frac{1}{1+t^2} ;\ t\in[0;x]$$

$$\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}dt \ge \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt ;\ t\in[0;x]$$

يعني أن $\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}dt \ge \arctan(x)$

إذن $\frac{1}{x}\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}dt \ge \frac{\arctan(x)}{x} ;\ x>0$

$$\Longleftarrow \quad \forall x>0 ;\ g(x) \ge f(x)$$

ولدينا انطلاقا من جدول تغيرات g :

$\forall x\in\mathbb{R}_+^* ;\ g(x) < 1$

إذن $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ f(x) \le g(x) < 1$

ب- استنتج أن : $|g'(x)| \le \frac{1}{x}(1-f(x)) ;\ x>0$

لدينا حسب 4-أ-

$$\forall x\in]0;+\infty[;\ g'(x) = \frac{1}{x}\left(f(x)-g(x)\right)$$

$$|g'(x)| = \frac{1}{x}|f(x)-g(x)| \quad ,\forall x>0$$

ولدينا حسب السؤال السابق : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ f(x)\le g(x)$

إذن $|g'(x)| = \frac{1}{x}(g(x)-f(x)) ;\ \forall x>0$

ولدينا أيضا حسب السؤال السابق $g(x)\le 1/\forall x>0$

إذن $\frac{1}{x}(g(x)-f(x)) \le \frac{1}{x}(1-f(x)) ;\ \forall x>0$

إذن $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ |g'(x)| \le \frac{1}{x}\left(1-f(x)\right)$

ج- تحقق أن :

$$\forall x\in\mathbb{R}^* :\ \frac{1}{x}\left(1-f(x)\right) = \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt$$

لدينا $\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt = \frac{1}{x^2}\left(\int_0^x 1 - \frac{1}{1+t^2}dt\right)$

$$= \frac{1}{x^2}\left[t-\arctan(t)\right]_0^x = \frac{1}{x} - \frac{\arctan(x)}{x^2}$$

إذن $\forall x\in\mathbb{R}^+ :\ \frac{1}{x}(1-f(x)) = \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt$

لأن $\left[\frac{1}{x}(1-f(x)) = \frac{1}{x}\left(1-\frac{\arctan(x)}{x}\right)\right]$

ب- تحقق أن $x h'(x) = \frac{x}{1+x^2} - \arctan(x)$

لكل x من $]0;+\infty[$:

لدينا $\forall x\in]0;+\infty[;\ h(x) = x^2 g'(x)$

يعني أن $h(x) = \arctan(x) - \int_0^x f(t)dt$

إذن $h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\arctan(x)}{x}$

$$\boxed{x h'(x) = \frac{x}{1+x^2} - \arctan(x)}$$

ج- استنتج أن $g'(x)<0$ لكل x من $]0;+\infty[$
ثم ضع جدول تغيرات g :

لدينا حسب السؤال 3-أ-

$$\forall x\in]0;+\infty[;\ \arctan(x) \ge \frac{x}{1+x^2}$$

إذن $\frac{x}{1+x^2} - \arctan(x) \le 0$

يعني أن $\forall x\in\mathbb{R}_+^* ;\ x h'(x) \le 0$

إذن $\forall x\in\mathbb{R}_+^* ;\ h'(x) \le 0$

ولدينا $h(0) = 0^2 \times g'(0) = 0$

x	0	$+\infty$
$h(x)$	0 ↘	

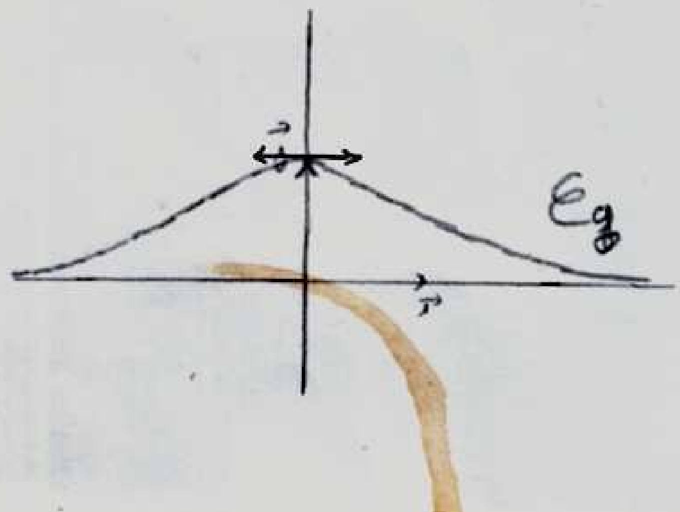
إذن $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ h(x) < 0$

ولدينا $\forall x\in\mathbb{R}_+^* ;\ h(x) = x^2 g'(x)$

إذن $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ g'(x) < 0}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$	0	↗	1	↘	0

⑤ رسم المنحنى :



2- أ- بين أن : $\forall t\in\mathbb{R}_+^* \quad 0\leq \frac{t}{1+t^2}\leq \frac{1}{2}$

لدينا $\forall t\in\mathbb{R}_+^* \quad (t-1)^2\geq 0 \Rightarrow t^2+1\geq 2t$

إذن $\frac{1}{t^2+1}\leq\frac{1}{2t} \Rightarrow \frac{t}{t^2+1}\leq \frac{1}{2}$

ونعلم أن $\forall t\in\mathbb{R}_+^* \quad \frac{t}{1+t^2}\geq 0$

إذن $\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad 0\leq \frac{t}{1+t^2}\leq\frac{1}{2}$

ب- استنتج أن $\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad |g'(x)|\leq \frac{1}{4}$

ليكن x من $\mathbb{R}_+^*$:

انطلاقا من 1-ب و 2-ج نستنتج أن

$$|g'(x)|\leq \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt$$

ولدينا حسب السؤال السابق :

$$\forall t\in[0;x] \quad 0\leq\frac{t^2}{1+t^2}\leq \frac{1}{2} t$$

$$t\in[0;x] ;\ \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt\leq\frac{1}{2}\int_0^x t\,dt$$

إذن $\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt \leq \frac{1}{4} x^2$

يعني أن $\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{t^2}{1+t^2}dt\leq\frac{1}{4}$

إذن $\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad |g'(x)|\leq\frac{1}{4}$

3- بين أن $g(x)=x$ تقبل حلا وحيدا في $[0;1]$

نضع $h(x)=g(x)-x$

$x\mapsto h(x)$ ق. للاشتقاق على $]0;1[$

$h'(x)=g'(x)-1<0$ إذن h تناقصية قطعا على $]0;1[$

ولدينا $h(0)=1$ و $h(1)=g(1)-1$

ولدينا $\forall x\in[0;1] \quad g(x)\leq 1$

إذن $h(1)=g(1)-1\leq 0$

إذن $h(0)\times h(1)\leq 0$ و $x\mapsto h(x)$ متصلة على $[0;1]$ وقابلة للاشتقاق عليه .

إذن $\exists!\,\alpha\in[0;1] ;\ g(\alpha)=\alpha$

4 أ- بين أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad 0\leq u_n\leq 1$

من أجل $n=0$ لدينا $V : 0\leq u_0=0\leq 1$

نفترض أنه $1\geq u_n\geq 0$ ولنبين أن $1\geq u_{n+1}\geq 0$

لدينا $0\leq u_n\leq 1$ و g تناقصية ومتصلة على $[0;1]$

إذن $g(1)\leq g(u_n)\leq g(0)$

إذن $0\leq u_{n+1}\leq 1$

إذن حسب البرهان بالترجع فإن $\forall n\in\mathbb{N} ;\ 0\leq u_n\leq 1$

ب- بين أن $\forall n\in\mathbb{N} : |u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{4}|u_n-\alpha|$

لدينا $0\leq u_n\leq 1$ و $\alpha\in[0;1]$ و $g(\alpha)=\alpha$ و g متصلة على $[0;1]$ و ق. الاشتقاق عليه

إذن بتطبيق TAF على مجال طرفاه α و u_n

نجد أن $|g(u_n)-g(\alpha)|=|g'(c)|\times|u_n-\alpha|$

حيث أن $c\in]0;1[$

ونعلم أن $\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad |g'(x)|\leq\frac{1}{4}$

إذن $c\in]0;1[\quad |g'(c)|\leq \frac{1}{4}$

إذن $\forall n\in\mathbb{N} ;\ |g'(c)|\,|u_n-\alpha|\leq\frac{1}{4}|u_n-\alpha|$

ولدينا $\forall n\in\mathbb{N} ;\ |g(u_n)-g(\alpha)|=|g'(c)|\,|u_n-\alpha|$

إذن $|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{4}|u_n-\alpha| ;\ \forall n\in\mathbb{N}$

ج- استنتج نهاية u_n وبين أنها متقاربة

لنبين أولا أن $\forall n\in\mathbb{N} ;\ |u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n$

من أجل $n=0$ لدينا $|u_0-\alpha|\leq 1$

وهذا صحيح لأن $(\alpha ; u_0)\in[0;1]^2$

نفترض أن $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n$

ولنبين أن $|u_{n+1}-\alpha|\leq\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

لدينا $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n$

إذن $\frac{1}{4}|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

إذن $|u_{n+1}-\alpha|\leq\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

إذن حسب افتراض الترجع فإن $\forall n\in\mathbb{N} ;\ |u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n$

وبما أن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0 ;\ \left|\frac{1}{4}\right|<1$

فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n-\alpha=0$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n=\alpha}$$

إذن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة .

أسئلة مستقلة

1 - حدد نهاية المتتالية $(u_n)_{n>0}$ المعرفة كالتالي:

$$u_n = \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p$$

لدينا

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p$$

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

حيث $f(x)=x^p$

f دالة متصلة وق. للاشتقاق على $]0;1[$

إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 x^p\,dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{p+1}$$

2 - ليكن z و z' من $\mathbb{C}$ بين أن

$$|z+z'|^2 \leq (1+|z|^2)(1+|z'|^2)$$

نعلم أن: $|z+z'| \leq |z|+|z'|$

$$|z+z'|^2 \leq |z|^2+|z'|^2+2|z\times z'|$$

ولدينا $(1+|z|^2)(1+|z'|^2) = 1+|z'|^2+|z|^2+|zz'|^2$

نعلم أن $(|zz'|-1)^2 \geq 0$

إذن $|zz'|^2+1 \geq 2|z\cdot z'|$

$$|zz'|^2+1+|z|+|z'| \geq 2|z\times z'|+|z|^2+|z'|^2$$

إذن $|z+z'|^2 \leq (1+|z|^2)(1+|z'|^2)$

3 - بين أنه إذا كان $|z|=1$ فإن

$|1+z|\geq 1$ أو $|1+z^2|\geq 1$

لدينا $|z|=1$ إذن $\exists\theta\in]-\pi;\pi]; z=e^{i\theta}$

ولدينا $|1+z| = |1+e^{i\theta}| = |2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}|$

إذن

$$|1+z| = 2|\cos\frac{\theta}{2}|$$

إذا كان $\theta\in\left[-\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$ أي أن $\frac{\theta}{2}\in\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$

فإن $|\cos\frac{\theta}{2}| \geq \frac{1}{2}$ ومنه فإن $|1+z|\geq 1$

وإذا كان $\theta\notin\left[-\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$ فإن

$\cos\theta \leq -\frac{1}{2}$ أي أن $|\cos\theta| \geq \frac{1}{2}$

ولدينا $|1+z^2| = |1+e^{2i\theta}|$

$$|1+z^2| = |2\cos\theta\, e^{i\theta}| = 2|\cos\theta|$$

ولدينا $\forall\theta\in\left]-\pi;-\frac{2\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{2\pi}{3};\pi\right]; |\cos\theta|\geq\frac{1}{2}$

إذن $|1+z^2| \geq 1$

خلاصة:

$|z|=1$ $\Rightarrow$ $|1+z|\geq 1$ أو $|1+z^2|\geq 1$

من انجاز:

- مهدي بنكروم
- وليد حفيظ الدين

بإشراف الأستاذ "الحانتي"