الأولى علوم رياضية	فرض رقم 1	2017-2016

فرض رقم

التمرين الأول:

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين بما يلي : $f\left(x\right)=\frac{1}{4}x^2+1$ و $g\left(x\right)=\frac{x+4}{x+3}$

ليكن $\left(C_f\right)$ و $\left(C_g\right)$ منحنيا الدالتين في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أنجز جدول تغيرات كل من الدالتين f و g

2) حل المعادلتين $f\left(x\right)=0$ و $g\left(x\right)=0$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجتين

3) أ) بين أن المعادلة $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ تكتب أيضا $\left(x-1\right)\left(x+2\right)^2=0$

ب) استنتج نقط تقاطع المنحنيين $\left(C_f\right)$ و $\left(C_g\right)$

4) أرسم في نفس المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ المنحنيين $\left(C_f\right)$ و $\left(C_g\right)$

5) حدد مبيانيا مجموعة حلول المعادلة $\frac{4}{x+3}\leq x^2$

التمرين الثاني:

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين بما يلي : $f\left(x\right)=x-4\sqrt{x-3}$ و $g\left(x\right)=\sqrt{x-3}$

1) حدد D_f و أنجز جدول تغيرات الدالة g

2) بين أن f تقبل قيمة دنيا في النقطة $a=7$

3) أ) حدد دالة مرجعية h بحيث يكون $f\left(x\right)=\left(h\circ g\right)\left(x\right)$

ب) أدرس رتابة الدالة f على المجال $\left[3,7\right]$

التمرين الثالث:

لتكن F الدالة العددية المعرفة بما يلي : $F\left(x\right)=\frac{x-E\left(x\right)}{x+1-E\left(x\right)}$

1) بين أن مجموعة تعريف الدالة F هي $D=\mathbb{R}$

2) تحقق أن F دورية دورها $T=1$

3) أكتب تعبيرا للدالة F على المجال $\left[0,1\right[$

4) أرسم جزء المنحنى للدالة F على المجال $\left[-1,3\right[$

التمرين الرابع:

ليكن m عدد حقيقي موجب قطعا و نعتبر الدالة f_m بحيث : $f_m\left(x\right)=\frac{x^2}{m}-2x$

1) أنجز جدول تغيرات الدالة f_m و استنتج أن $\frac{x^2}{m}+m\geq 2x$ لكل x من $\mathbb{R}$

2) ليكن a ; b و c أعداد حقيقية من $\mathbb{R}^{+*}$. استنتج مما سبق أن $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c$

تصحيح فرض 1:

التمرين 1:

*1 لدينا: $f(x)=\frac{1}{4}x^2+1$

f دالة حدودية و $\frac{-b}{2a}=0$

بما أن: $\frac{1}{4}\geqslant 0$

فإن:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	1	↗

* لدينا $g(x)=\frac{x+4}{x+3}$ دالة متخاطبة

و: $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=3-4$

$\Delta=-1<0$

يعني:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$g(x)$	↘	‖	↘

2* لدينا: $f(x)=0$

يعني: $\frac{1}{4}x^2+1=0$

أي: $\frac{1}{4}x^2=-1$ لا يمكن

إذن ليس لهذه المعادلة حل

يعني أن (C_f) لا يقطع محور الأفاصيل

* لدينا: $g(x)=0$

يعني: $\frac{x+4}{x+3}=0$

إذن: $\boxed{x=-4}$

يعني أن (C_g) يقطع محور الأفاصيل في $A(-4,0)$

3* لدينا: $g(x)=f(x)$

أي: $\frac{x+4}{x+3}=\frac{1}{4}x^2+1$

$$\frac{x^2(x+3)}{4}+(x+3)=x+4$$

$$x^3+3x^2+\cancel{4x}+12=\cancel{4x}+16$$

$$x^3+3x^2-4=0$$

نلاحظ أن 1 جذر لهذه الحدودية

يعني x^3+3x^2-4 تقبل القسمة على $x-1$

$$\begin{array}{r|l}
x^3+3x^2-4 & x-1 \\ \hline
-x^3+x^2 & x^2+4x+4 \\
4x^2 & \\
-4x^2+4x & \\
4x-4 & \\
-4x+4 & \\
0 &
\end{array}$$

يعني: $(x^3+3x^2-4)=(x-1)(x^2+4x+4)$

إذن: $(x-1)(x^2+4x+4)=0$

أي: $(x-1)(x+2)^2=0$

ومنه فإن $g(x)=f(x)$ تكتب على شكل

$$\boxed{(x-1)(x+2)^2=0}$$

ب- لدينا حسب ماسبق

$$(x-1)(x+2)^2=0$$

يعني: $x-1=0$ أو $x+2=0$

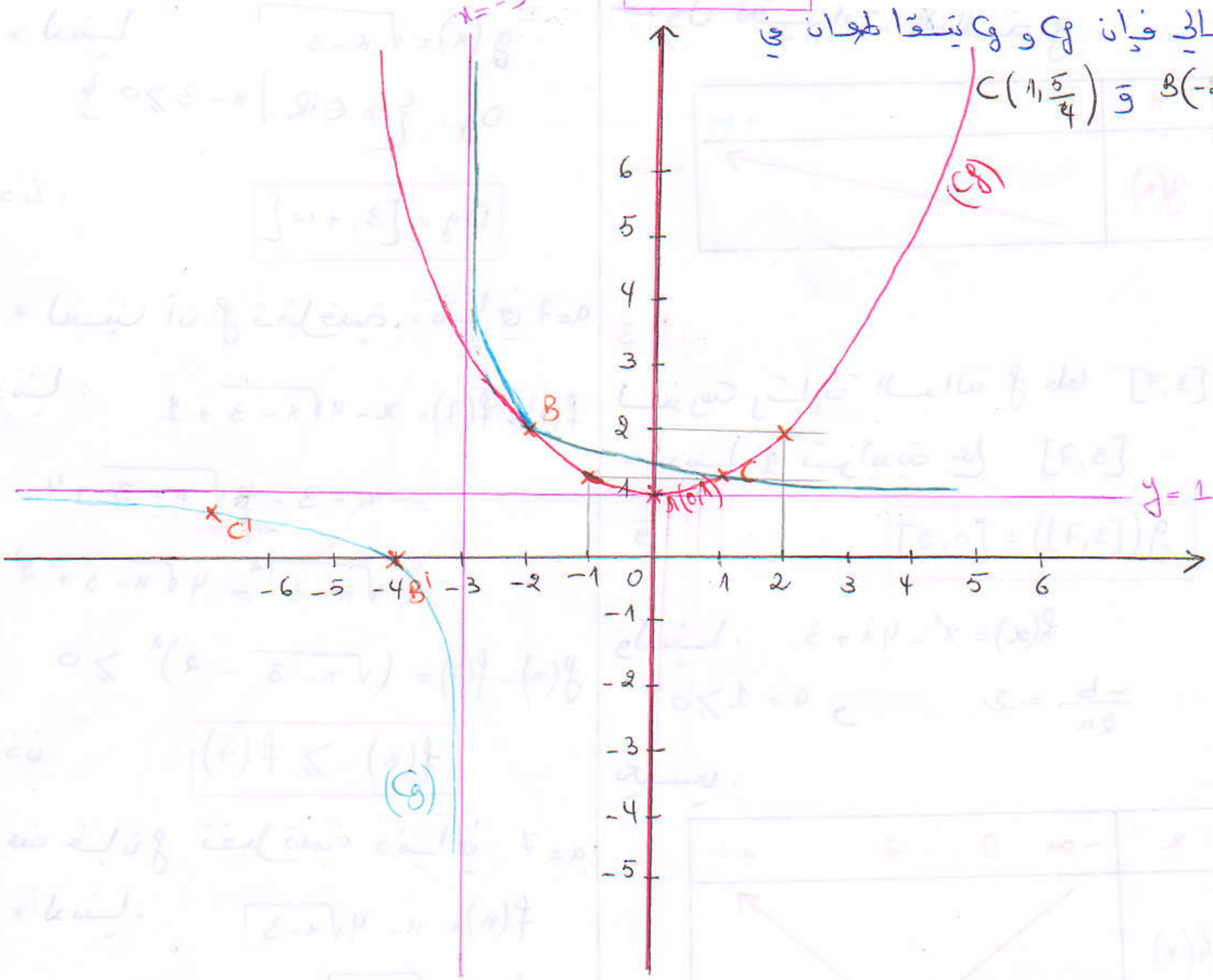
إذن: $\boxed{x=1}$ أو $\boxed{x=-2}$

لدينا من أجل $x=1$ ، $g(1)=\frac{5}{4}$

ومن أجل $x=-2$ ، فإن $\boxed{g(-2)=2}$

وبالتالي فإن C_f و C_g يتقاطعان في

$B(-2,2)$ و $C\left(1,\frac{5}{4}\right)$



لدينا: $\frac{4}{x+3} \leqslant x^2$

يعني: $\frac{1}{x+3} \leqslant \frac{1}{4}x^2$

$$\frac{1}{x+3}+1 \leqslant \frac{1}{4}x^2+1$$

$$\frac{x+4}{x+3} \leqslant \frac{1}{4}x^2+1$$

إذن: $\boxed{g(x) \leqslant f(x)}$

حسب البيان ، فإن: $S=]-\infty,-3[\cup[1,+\infty[\cup\{-2\}$

التمرين 2 :

1* لدينا $g(x)=\sqrt{x-3}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x-3 \geqslant 0\}$

إذن : $\boxed{D_g = [3,+\infty[}$

2* لنبين أن f تقبل قيمة دنيا في $a=7$

لدينا : $f(x)-f(7) = x-4\sqrt{x-3}+1$

$= x-3-4\sqrt{x-3}+4$

$= \sqrt{x-3}^2-4\sqrt{x-3}+2^2$

$f(x)-f(7) = (\sqrt{x-3}-2)^2 \geqslant 0$

إذن : $\boxed{f(x) \geqslant f(7)}$

ومنه فإن f تقبل قيمة دنيا في $a=7$

3* أ) لدينا : $f(x) = x-4\sqrt{x-3}$

$f(x) = \sqrt{x-3}^2 - 4\sqrt{x-3}+3$

$f(x) = (g(x))^2 - 4(g(x)) + 3.$

إذن : $f(x) = (h \circ g)(x)$

يعني : $\boxed{h(x) = x^2-4x+3}$

جدول تغيرات الدالة g.

x	3 $\nearrow$ $+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$

3* ب

لندرس رتابة الدالة f على $[3,7]$

لدينا g تزايدية على $[3,7]$

و $\boxed{g([3,7]) = [0,2]}$

ولدينا ، $h(x) = x^2-4x+3.$

$a = 1 \geqslant 0$ و $\frac{-b}{2a} = 2$

يعني :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$h(x)$	$\searrow$		-1	$\nearrow$

من خلال جدول الإشارات.

لدينا h تناقصية على $[0,2]$

وبالتالي فإن f دالة تناقصية على $[3,7]$

التمرين 3 :

*1 لدينا : $f(x) = \dfrac{x - E(x)}{x+1-E(x)}$

يعني : $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x+1-E(x) \neq 0\}$

نعلم أن :	$x-1 < E(x) \leqslant x$
يعني :	$-x \leqslant -E(x) < 1-x$
إذن :	$\boxed{1 \leqslant x+1-E(x) < 2}$

ومنه فإن $x+1-E(x) \neq 0$ شرط محقق

وبالتالي فإن : $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

*2 لدينا : $f(x) = \dfrac{x - E(x)}{x+1-E(x)}$

$$f(x+1) = \frac{x+1-E(x+1)}{x+2-E(x+1)}$$

$$f(x+1) = \frac{x+\cancel{1}-E(x)-\cancel{1}}{x+2-E(x)-1}$$

إذن : $f(x+1) = \dfrac{x-E(x)}{x+1-E(x)}$ ومنه : $\boxed{f(x+1) = f(x)}$

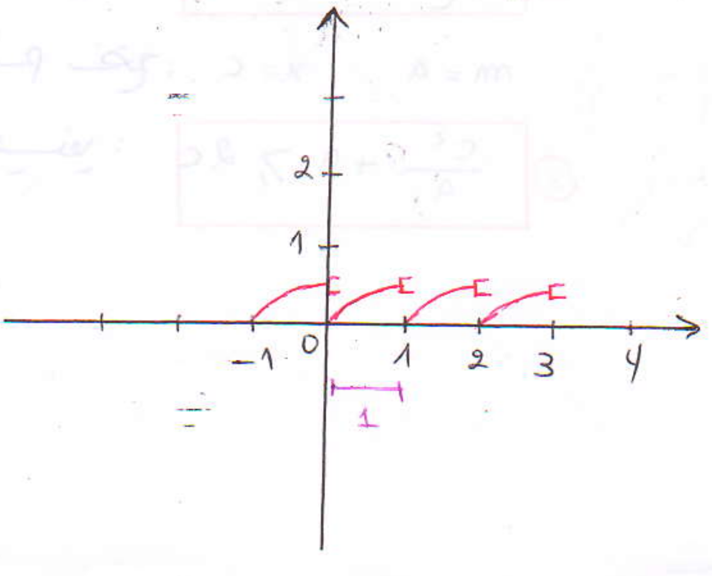
وبالتالي نستنتج أن f دورية دورها $T = 1$

*3 في المجال $[0,1[$

بما أن $x \in [0,1[$ فإن $E(x) = 0$

إذن : $\boxed{f(x) = \dfrac{x}{x+1}}$.

*4 لنرسم جزء المنحنى للدالة f على $1,3[$



التمرين 4:

1* لدينا: $f_m(x) = \frac{x^2}{m} - 2x$

لدينا: $\frac{-b}{2a} = m$.

بما أن: $\frac{1}{m} > 0$ فإن:

x	$-\infty$		m		$+\infty$
$f(x)$		↘	$-m$	↗	

لدينا $f_m(x) = \frac{x^2}{m} - 2x$

يعني: $f_m(m) = \frac{m^2}{m} - \frac{2m^2}{m}$

إذن: $\boxed{f_m(m) = -m}$

* لدينا حسب جدول التغيرات:

$f_m(x) \geqslant -m$

يعني:

$\frac{x^2}{m} - 2x \geqslant -m$

إذن:

$\boxed{\frac{x^2}{m} + m \geqslant 2x}$

2* لدينا $\frac{x^2}{m} + m \geqslant 2x$

نضع $x = a$ و $m = b$

يعني (1) $\boxed{\frac{a^2}{b} + b \geqslant 2a}$

ثم نضع $x = b$ و $m = c$

يعني: (2) $\boxed{\frac{b^2}{c} + c \geqslant 2b}$

ثم نضع: $x = c$ $m = a$.

يعني: (3) $\boxed{\frac{c^2}{a} + a \geqslant 2c}$

من 1 و 2 و 3 وبجمع طرفا بطرف نحصل على:

$\frac{a^2}{b} + b + \frac{b^2}{c} + c + \frac{c^2}{a} + c \geqslant 2a + 2b + 2c$

$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant 2a + 2b + 2c - a - b - c$

ومنه: $\boxed{\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant a + b + c}$

من إنجاز:

* هبة لمراني الشرقي