



5 نقط

01. لنتعتبر التطبيقات التالية :

1. هل التطبيق f تبايني ؟ هل التطبيق f شمولي ؟ (مغللا جوابك) (1 ن)
2. حدد $g^{-1}(\{3\})$ (1 ن)
3. بين أن : التطبيق h تقابلي ؟ حدد $h(\mathbb{R}^2)$ و $h^{-1}(\mathbb{R}^2)$ (1 ن 0,5 + 1 ن 0,5 + 1 ن)

3 نقط

02.

1. ما هي قيمة حقيقية العبارة التالية : $\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{(n-2)(n-1)n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1,2\}$. (مغللا جوابك) (1 ن)
2. لنتعتبر p من $\mathbb{N}^*$.
- أ- بين أن : $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{p}} \geq \sqrt{p}$ $\forall p \in \mathbb{N}^*$ (بدون استعمال التراجع) (1 ن)
3. بين أن المعادلة التالية ليس لها حل : $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+10} + \sqrt{x+100} = 12$: (E) : $x \in [-1, +\infty[$ (1 ن)

3 نقط

03.

1. لنتعتبر $\{1\} \setminus \mathbb{N}^*$ و $n \in \mathbb{N}^*$. استدلل بالخلف على ما يلي : إذا كان العدد q يقسم العدد n إذن q لا يقسم $n+1$ (1 ن)
2. بين أن : لكل n من $\mathbb{N}$ أن العدد $4^{2n+2} - 15n - 16$ يقبل القسمة على 225 (2 ن)

4 نقط

04.

1. أكتب بالتفصيل المجموعة : $F = \{r \in \mathbb{Q} / \exists (n,p) \in \mathbb{N}^2, r = \frac{n}{p} \text{ و } 1 \leq p \leq 3n \leq 9\}$ (1 ن)
2. لتكن A و B و C ثلاث أجزاء من مجموعة E بين أن : أ- $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ (1 ن)
- ب- بين أن : $(B \setminus C \subset A \text{ و } C \setminus D \subset A) \Rightarrow B \setminus D \subset A$ (2 ن)

2 نقط

05.

- ليكن a و b و c من $\mathbb{R}^{+*}$. بين أن : $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ (2 ن)

3 نقط

06.

- لنتعتبر المضلعات المحدبة التالية : (P_4 مضلع رباعي محدب - P_5 مضلع خماسي محدب - P_6 مضلع سداسي محدب) أنظر الشكل .
1. ما هو عدد أقطار كل من المضلعات P_4 و P_5 و P_6 ؟ (0,5 ن)
2. لنتعتبر $P_n = A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1} A_n$ مضلع محدب حيث عدد رؤوسه هو n مع n عدد صحيح طبيعي و $n \geq 4$. نضع d_n هو عدد أقطار المضلع المحدب P_n . لنتعتبر الصيغتين التاليتين حيث إحداهما تحقق الجواب عن السؤال الأول من هي ؟
- الصيغة الأولى : $d_{n+1} = 3 + d_n$ (1) الصيغة الثانية : $d_{n+1} = n - 1 + d_n$ (2) (0,5 ن)
3. بين بالتراجع : كل مضلع محدب P_n حيث عدد رؤوسه هو n مع n عدد صحيح طبيعي و $n \geq 4$ بأن عدد أقطاره d_n يحقق كذلك العلاقة التالية : $d_n = \frac{n^2 - 3n}{2}$ (2 ن)



مضلع سداسي محدب	مضلع خماسي محدب	مضلع رباعي محدب
الشكل 3	الشكل 2	الشكل 1



1. ندرس تباينية f :

لدينا: $(\forall x, x' \in E : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x') \Leftrightarrow (f \text{ تبايني})$

ليكن x و x' من $\mathbb{R}$ حيث:

$$f(x) = f(x') \Rightarrow \sin x = \sin x'$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x' + 2k\pi \\ x = \pi - x' + 2k\pi \end{cases}$$

ومنه: f غير تبايني.

مثال مضاد:

نأخذ: $x = \frac{\pi}{4}$ و $x' = \frac{\pi}{4} + 6\pi$

ومنه: $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4} + 6\pi\right)$

إذن: $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\pi - \frac{\pi}{4} + 6\pi\right)$

ولكن: $\pi - \frac{\pi}{4} + 6\pi \neq \frac{\pi}{4}$

خلاصة: f غير تبايني.

1. ندرس شمولية f :

نأخذ -2 من $\mathbb{R}$ نبحث هل له سابق x من $\mathbb{R}$

إذن: $f(x) = -2$

ومنه: $\sin x = -2$

و هذا غير ممكن لأن: $-1 \leq \sin x \leq 1$

ومنه: f غير شمولي.

خلاصة: f غير شمولي.

2. نحدد: $g^{-1}(\{3\})$:

لدينا: $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

ليكن $(n, p) \in \mathbb{N}^2$

$$(n, p) \in g^{-1}(\{3\}) \Leftrightarrow g^{-1}((n, p)) \in \{3\}$$

$$\Leftrightarrow g((n, p)) = 3$$



$$\Leftrightarrow n+p=3$$

$$\Leftrightarrow (n,p) \in \{(1,2), (2,1), (0,3), (3,0)\}$$

$$g^{-1}(\{3\}) = \{(1,2), (2,1), (0,3), (3,0)\} \text{ : خلاصة}$$

3. نبين أن : h تقابلي

لكي يكون h تقابلي :

$$f \text{ تقابلي} \Leftrightarrow (\forall a' \in F, \exists! a \in E : a' = f(a))$$

مع $F = \mathbb{R}^2$ و $E = \mathbb{R}^2$ و $a' = (x', y')$ و $a = (x, y)$

لهذا نبين أن المعادلة التالية تقبل حل وحيد :

$$h((x, y)) = (x', y') \Leftrightarrow (x + 3y, x - y) = (x', y')$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = x' \\ x - y = y' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y = x' \\ x - y = y' \end{cases} \text{ : ومنه نحل النظام}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \text{ : نحسب } \Delta$$

ومنه نظام هي نظام كرامير تقبل حل وحيد.

وبالتالي h تقابلي.

خلاصة : h تقابلي من $\mathbb{R}^2$ إلى $\mathbb{R}^2$.

3. نحدد $h(\mathbb{R}^2)$ و $h^{-1}(\mathbb{R}^2)$

بما أن h تقابلي فإن : $h(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ و $h^{-1}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$

02

1. قيمة حقيقية العبارة التالية : $\frac{1}{(n-2)(n-1)n} \leq \frac{1}{n^3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\}$

لدينا :

$$n \leq n \text{ و } -1 \leq 0 \Rightarrow n-1 \leq n. \text{ و } -2 \leq 0 \Rightarrow n-2 \leq n$$

ومن ضرب طرف بطرف : $(n-2) \times (n-1) \times n \leq n \times n \times n$ (لأن الأعداد موجبة)

$$\text{إذن : } (n-2) \times (n-1) \times n \leq n^3$$

$$\text{فإن : } \frac{1}{(n-2) \times (n-1) \times n} \geq \frac{1}{n^3}$$

وبالتالي : العبارة خاطئة .

خلاصة : العبارة خاطئة .



2. نبين أن: $\forall p \in \mathbb{N}^*, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{p}} \leq \sqrt{p}$

نأخذ: $\forall k \in \mathbb{N}^*, 1 \leq k \leq p$

ومنه:

$$\begin{aligned} 1 \leq k \leq p &\Rightarrow 1 \leq \sqrt{k} \leq \sqrt{p} \\ &\Rightarrow \sqrt{p} \leq \sqrt{k} \times \sqrt{p} \leq p (\times \sqrt{p}) \\ &\Rightarrow \frac{1}{p} \leq \frac{1}{\sqrt{k} \times \sqrt{p}} \leq 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k} \times \sqrt{p}} \geq \frac{1}{p} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1} \times \sqrt{p}} \geq \frac{1}{p}, \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{p}} \geq \frac{1}{p}, \frac{1}{\sqrt{3} \times \sqrt{p}} \geq \frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{\sqrt{p} \times \sqrt{p}} \geq \frac{1}{p} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1} \times \sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt{3} \times \sqrt{p}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{p} \times \sqrt{p}} \geq \underbrace{\frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p}}_p \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1} \times \sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt{3} \times \sqrt{p}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{p} \times \sqrt{p}} \geq p \times \frac{1}{p} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{p}} \left[\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{p}} \right] \geq 1 \\ &\Rightarrow \left[\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{p}} \right] \geq \sqrt{p} \end{aligned}$$

خلاصة: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{p}} \leq \sqrt{p}$

3. نبين أن المعادلة (E) ليس لها حل:

لدينا:

$$\begin{aligned} x \geq -1 &\Rightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x + 10 \geq 9 \\ x + 100 \geq 99 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} \geq 0 \\ \sqrt{x+10} \geq 3 \\ \sqrt{x+100} \geq \sqrt{99} \end{cases} \\ &\Rightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{x+10} + \sqrt{x+100} \geq 3 + \sqrt{99} > 12 ; \quad (\sqrt{99} > 9) \end{aligned}$$

وبالتالي: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+10} + \sqrt{x+100} \neq 12$



1. نستدل بالخلف أن : q لا يقسم $n+1$:

نفترض أن : q يقسم $n+1$ إذن : $n+1 = qk'$

ونعلم أن : $n = qk$

ومنه : $qk+1 = qk'$

إذن : $1 = qk' - qk$

فإن : $1 = q \times (k' - k)$

وبالتالي : $1 = q$ وهذا غير ممكن إذن ما فترضناه كان خاطئا

ومنه : q لا يقسم $n+1$

خلاصة : q لا يقسم $n+1$

2. نبين أن : العدد $A_n = 4^{2n+2} - 15n - 16$ يقبل القسمة على 225

نتحقق أن العلاقة A_n صحيحة لـ $n=0$:

لدينا : $A_n = 4^{2n+2} - 15n - 16$

$$A_0 = 4^{2 \times 0 + 2} - 15 \times 0 - 16$$

$$A_0 = 4^2 - 0 - 16$$

$$A_0 = 16 - 16$$

$$A_0 = 0$$

وبالتالي: العلاقة A_n صحيحة لـ $n=0$.

نفترض أن العلاقة A_n صحيحة إلى n :

أي أن: العدد $A_n = 4^{2n+2} - 15n - 16$ يقبل القسمة على 225 أي $A_n = 4^{2n+2} - 15n - 16 = 15k$ مع $k \in \mathbb{N}$ (معطيات التراجع) .

نبين أن العلاقة A_n صحيحة لـ $n+1$:

$$A_{n+1} = 4^{2(n+1)+2} - 15(n+1) - 16$$

$$A_{n+1} = 4^{2(n+1)+2} - 15(n+1) - 16$$

$$A_{n+1} = 4^{2n+2} \times 4^2 - 15n - 15 - 16$$

$$A_{n+1} = 4^{2n+2} \times (15+1) - 15n - 15 - 16$$

$$A_{n+1} = (4^{2n+2} \times 1 - 15n - 16) + 4^{2n+2} \times 15 - 15$$

$$A_{n+1} = \underbrace{(4^{2n+2} - 15n - 16)}_{15k} + 15 \times (4^{2n+2} - 1)$$

$$(1) : A_{n+1} = \underbrace{(4^{2n+2} - 15n - 16)}_{\text{donnée recu.}} + 15 \times (4^{2n+2} - 1)$$

ومنه نثبت بالتراجع أن : $B_n = 4^{2n+2} - 1$ يقبل القسمة على 15 .



نحقق أن العلاقة B_n صحيحة لـ $n = 0$:

$$B_n = 4^{2n+2} - 1 \text{ لدينا:}$$

$$B_0 = 4^{2 \times 0 + 2} - 1 = 15 \text{ أي:}$$

وبالتالي: العلاقة B_n صحيحة لـ $n = 0$.

نفترض أن العلاقة B_n صحيحة إلى n :

أي أن: العدد $B_n = 4^{2n+2} - 1$ يقبل القسمة على 15 أي $B_n = 4^{2n+2} - 1 = 15k'$ مع $k \in \mathbb{N}$ (معطيات التراجع) .

نبين أن العلاقة B_n صحيحة لـ $n + 1$:

$$B_{n+1} = 4^{2(n+1)+2} - 1 \text{ أي نبين أن:}$$

$$B_{n+1} = 4^{2(n+1)+2} - 1$$

$$B_{n+1} = 4^{2n+2} \times 4^2 - 1$$

$$B_{n+1} = 4^{2n+2} \times (15 + 1) - 1$$

$$B_{n+1} = 4^{2n+2} \times 15 + \underbrace{4^{2n+2} - 1}_{15k'}$$

$$B_{n+1} = 15[4^{2n+2} + k']$$

ومنه: B_{n+1} يقبل القسمة على 15 : (2)

حسب (1) و (2) إذن: A_{n+1} يقبل القسمة على 15

خلاصة: العدد $A_n = 4^{2n+2} - 15n - 16$ يقبل القسمة على 225

هناك طريقة ثانية

1. نكتب بالتفصيل :

$$1 \leq 3n \leq 9 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq n \leq 3$$

ومنه: $n \in \{1, 2, 3\}$

حالة أولى: $n = 1$ ونعلم أن: $1 \leq p \leq 3n$

$$\text{إذن: } 1 \leq p \leq 3 \times 1$$

$$\text{ومنه: } 1 \leq p \leq 3$$

وبالتالي: $p \in \{1, 2, 3\}$

$$\blacksquare \text{ نأخذ: } n = 1 \text{ و } p \in \{1, 2, 3\} \text{ إذن: } r \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$$

حالة ثانية: $n = 2$ ونعلم أن: $1 \leq p \leq 3n$

$$\text{إذن: } 1 \leq p \leq 3 \times 2$$

$$\text{ومنه: } 1 \leq p \leq 6$$

وبالتالي: $p \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\blacksquare \text{ نأخذ: } n = 2 \text{ و } p \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ إذن: } r \in \left\{2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}\right\}$$



حالة ثالثة: $n = 3$ و نعلم أن: $1 \leq p \leq 3n$

إن: $1 \leq p \leq 3 \times 3$

ومنه: $1 \leq p \leq 9$

وبالتالي: $p \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

■ نأخذ: $n = 3$ و $p \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ إذن: $r \in \left\{3, \frac{3}{2}, 1, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{3}{8}, \frac{1}{3}\right\}$

خلاصة: $F = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, 2, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{3}{8}, 3\right\}$

2.

أ- نبيّن أن: $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = A \cap (B \setminus C)$

$$\begin{aligned} (A \cap B) \setminus (A \cap C) &= (A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)} \\ &= A \cap B \cap \overline{A \cap C} \\ &= A \cap \overline{A \cap C} \cap B \\ &= (A \cap \overline{A \cap C}) \cap B \\ &= (A \cap (\overline{A} \cup \overline{C})) \cap B \\ &= ((A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{C})) \cap B \\ &= (\emptyset \cup (A \cap \overline{C})) \cap B \\ &= (A \cap \overline{C}) \cap B \\ &= A \cap \overline{C} \cap B \\ &= A \cap B \cap \overline{C} \\ &= A \cap (B \cap \overline{C}) \\ &= A \cap (B \setminus C) \end{aligned}$$

خلاصة: $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = A \cap (B \setminus C)$

ب- نبيّن أن: $(B \setminus C \subset A \text{ و } C \setminus D \subset A) \Rightarrow B \setminus D \subset A$

ليكن $x \in B \setminus D$ نبيّن أن: $x \in A$.

$x \in B \setminus D$ إذن: $x \in B$ و $x \notin D$

حالة أولى: $x \in C$

لدينا: $x \in C$ و $x \notin D$ إذن: $x \in C \setminus D$ ومنه: $x \in A$ (لأن $C \setminus D \subset A$)

خلاصة 1: $B \setminus D \subset A$

حالة ثانية: $x \notin C$

لدينا: $x \in B$ و $x \notin C$ إذن: $x \in B \setminus C$ ومنه: $x \in A$ (لأن $B \setminus C \subset A$)

خلاصة 2: $B \setminus D \subset A$



في كلتا الحالتين : $B \setminus D \subset A$

خلاصة : $(B \setminus C \subset A \text{ و } C \setminus D \subset A) \Rightarrow B \setminus D \subset A$

05

1. نبين أن : $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

لكي نبين : $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ يجب أن نبين العلاقة التالية صحيحة : $x+y \geq 2\sqrt{xy}$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \Leftrightarrow x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

ومنه العلاقة صحيحة

▪ نأخذ : $x=a$ و $y=b$ إذن : $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

▪ نأخذ : $x=b$ و $y=c$ إذن : $b+c \geq 2\sqrt{bc}$

▪ نأخذ : $x=c$ و $y=a$ إذن : $a+c \geq 2\sqrt{ac}$

ومنه ضرب جميع الأطراف :

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq 2\sqrt{ab} \times 2\sqrt{bc} \times 2\sqrt{ac} \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(a+c) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$$

وبالتالي : $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

خلاصة : $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

06

1. عدد أقطار المضلعات :

الشكل الثالث : $d_6 = 9$

$d_5 = 5$

الشكل الثاني : $d_4 = 2$

الشكل الأول :

2. الصيغة التحقق الجواب عن السؤال الأول هي : الصيغة الثانية : $d_{n+1} = n - 1 + d_n$: (2)

3. نبين بالترجع :

نبين بالترجع أن عدد أقطار مضلع محدب حيث عدد رؤوسه n هو $d_n = \frac{n \times (n-3)}{2}$

مضلع محدب عدد رؤوسه $n+1$	مضلع محدب عدد رؤوسه n



نتحقق أن العلاقة صحيحة لـ $n = 4$:

$$d_n = \frac{n \times (n-3)}{2} \quad \text{لدينا :}$$

$$d_4 = \frac{4 \times (4-3)}{2} = 2 \quad \text{أي :}$$

وبالتالي: العلاقة صحيحة لـ $n = 0$.

نفترض أن العلاقة صحيحة إلى n :

$$\text{أي أن : } d_n = \frac{n \times (n-3)}{2} \quad \text{(معطيات التراجع) .}$$

نبين أن العلاقة صحيحة لـ $n+1$:

$$d_{n+1} = \frac{(n+1) \times (n-2)}{2} \quad \text{أي نبين أن :}$$

الطريقة 1 :

حسب السؤال السابق : لدينا العلاقة $d_{n+1} = n-1 + d_n$ (2)

إذن :

$$d_{n+1} = n-1 + d_n$$

$$\text{(حسب معطيات التراجع)} \quad = n-1 + \frac{n(n-3)}{2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2n-2+n(n-3)}{2} = \frac{n^2-n-2}{2} = \frac{n^2-1-(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n-1-1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{2} \end{aligned}$$

إذن العلاقة صحيحة لـ $n+1$.

الطريق 2 :

عندما المضلع P_n نضيف له رأس A_{n+1} نحصل على مضلع محدب P_{n+1} له $n+1$ رأس

لدينا : n رأس سابقة (مضلع محدب عدد رؤوسه n) تعطي لنا $d_n = \frac{n \times (n-3)}{2}$ قطر حسب معطيات التراجع . أما الرأس الذي

أضفناه سيرتبط بالرؤوس n السابقة بقطع عددها n قطعة حيث 2 ليست بقطر إذن عدد الأقطار التي أضفنا هي : $n-2$ و لا ننسى القطعة التي أصبحت قطر والتي كانت تربط الرأسين التي أضفنا بينهما الرأس A_{n+1} وبالتالي عدد الأقطار التي أضفنا هو

$$n-2+1=n-1 \quad \text{و منه عدد الأقطار للمضلع المحدب } P_{n+1} \text{ هو سيكون : } d_n + n-1 \quad \text{ومنه :}$$

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= d_n + n-1 = \frac{n \times (n-3)}{2} + n-1 = \frac{n^2-3n+2n-2}{2} = \frac{n^2-n-2}{2} \\ &= \frac{(n+1) \times (n-2)}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ومنه : } d_{n+1} = \frac{(n+1) \times (n-2)}{2}$$

وبالتالي العلاقة صحيحة لـ $n+1$

خلاصة: عدد أقطار مضلع محدب حيث عدد رؤوسه n هو $d_n = \frac{n \times (n-3)}{2}$.