

التمرين الأول

$$\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2}{3 - U_n} \end{cases} \text{ لتكن } (U_n)_n \text{ متتالية عددية معرفة ب:}$$

1- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 < U_n < 2$

2- تحقق أن $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 1)(U_n - 2)}{3 - U_n}$ وأدرس رتبة المتتالية $(U_n)_n$

3- نضع $V_n = \frac{2 - U_n}{1 - U_n}$ لكل n من \mathbb{N}

أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية وأحسب V_n بدلالة n
ب- استنتج الحد العام U_n بدلالة n

4- لكل عدد طبيعي غير منعدم n نضع : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{p=n} U_p$

أ- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} - 1 \leq \frac{2}{3}(U_n - 1)$

ب- أثبت أن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n - 1 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^n$

ج- استنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1 + \frac{1}{n} \leq S_n \leq 1 + \frac{5}{2n} - \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3} \right)^n$

التمرين الثاني

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{U_n - 1}{U_n + 3} \end{cases} \text{ لتكن } (U_n)_n \text{ متتالية عددية معرفة ب:}$$

1- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad -1 < U_n \leq 0$

2- أدرس رتبة المتتالية $(U_n)_n$

3- نضع $V_n = \frac{1}{1 + U_n}$ لكل n من \mathbb{N}

أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية حسابية وأحسب V_n بدلالة n
ب- حدد الحد العام U_n بدلالة n

4- لكل عدد طبيعي غير منعدم n نضع : $S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{k=n} V_k$. بين أن $\left| S_n - \frac{1}{4} \right| \leq \frac{3}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

التمرين الثالث

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{3^k}$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n

1) أحسب U_1 ; U_2

2) أ- بين بالترجع أن $p \leq \left(\frac{3}{2} \right)^p$ $(\forall p \geq 2)$

ب- استنتج أن المتتالية $(U_n)_n$ مكبورة بالعدد 1