أولى علوم رياضية	فرض محروس 3	Inisse Groupe scolaire
الدورة 1	2014/01/09	ثانوية أنيس الخاصة

التمرين 1 (7 نقط)

نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} U_1 = \dfrac{7}{3} \\ U_{n+1} = \dfrac{7U_n + 3}{3U_n + 7} \end{cases}$

1-بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad U_n \geq 1$ — 1

2- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_{n\geq1}$. استنتج أن $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad U_n \leq \dfrac{7}{3}$ — 1.5

3- نضع: $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 1}$

أ- بين أن $(V_n)_{n\geq1}$ متتالية هندسية و حدد عناصرها. — 1.5

ب- استنتج أن: $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad U_n = \dfrac{1+\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}{1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$ — 1.5

ج- أحسب المجموع: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{U_k + 1}$ — 1.5

التمرين 2 (5 نقط)

المستوى (P) منسوب الى م.م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر الدائرة (C) التي معادلتها: $(C): \quad x^2 + y^2 - x\sqrt{3} - y = 0$

ولتكن النقطتين: $A(\sqrt{3},1)$ و $B(\sqrt{3},0)$

1- حدد مركز و شعاع الدائرة (C) — 1

2- حدد نقطتي تقاطع الدائرة (C) مع محور الأفاصيل . — 1

3- أحسب $Cos(\overline{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}})$ و $Sin(\overline{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}})$. — 1.5

4- أعط معادلة المستقيم (D) المماس للدائرة (C) عند النقطة A . — 1

5- بين أن: $(D) \perp (OA)$ — 0.5

التمرين 3 (4 نقط)

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بما يلي :

$$u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2} \quad \text{و} \quad v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+v_n}{2} \quad \text{و} \quad u_0=2 \quad \text{و} \quad v_0=-1$$

نضع : $w_n=u_n-v_n$ و $t_n=u_n+2v_n$.

1-بين أن : (w_n) متتالية هندسية ثم حدد w_n بدلالة n 1

2-بين بالترجع أن : $t_n=0$ لكل n من $\mathbb{N}$. 1

3- استنتج u_n بدلالة n . 1

4 - أحسب المجموع : $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$ 1

التمرين 4 (4 نقط) أسئلة مستقلة

1- لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية بحيث $u_n>0$ و نضع : $X_n=\frac{1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}}+\dots\dots\dots+\frac{1}{\sqrt{u_{n-1}}+\sqrt{u_n}}$

أثبت أن : $\forall n\geq 2: \quad X_n=\frac{(n-1)}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_n}}$ 1

2- لتكن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية بحيث $v_n>0$ وأساسها $q\neq 1$ ونضع :

$$Y_n=\frac{\sqrt{u_2}}{\sqrt{u_2}-\sqrt{u_1}}+\frac{\sqrt{u_3}}{\sqrt{u_3}-\sqrt{u_2}}+\dots\dots\dots+\frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{u_n}-\sqrt{u_{n-1}}}$$

برهن أن: $\forall n\geq 2: \quad Y_n=(n-1)\left(\frac{1}{1-\sqrt{\frac{1}{q}}}\right)$ 1

3- لتكن (a_n) متتالية عددية معرفة بما يلي : $a_n=\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n^2+k}$

بين أن : $\frac{2n+1}{(n+1)^2}\leq a_n\leq\frac{2n+1}{n^2+1}$ 2

بالتوفيق