

التمرين الأول

نعتبر المجموعات التالية : $A = \{6k + 1 / k \in \mathbb{Z}\}$ ، $B = \{3k' - 2 / k' \in \mathbb{Z}\}$ و $C = \{4p + 3 / p \in \mathbb{Z}\}$

(1) بين أن $A \subset B$. هل لدينا $A = B$ ؟ علل جوابك

(2) تحقق أن $19 \in B \cap C$ ثم حدد بادراك المجموعة $B \cap C$

التمرين الثاني

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 3$; $U_{n+1} = \frac{U_n - 8}{2U_n - 9}$ ونضع $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n - 4}$

(1) تحقق أن $(\forall n \in \mathbb{N}) U_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{7}{2(2U_n - 9)}$ و بين أن $1 < U_n < 4$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

(2) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n - U_{n+1} = \frac{2(U_n - 1)(U_n - 4)}{2U_n - 9}$ و أدرس رقابة المتتالية $(U_n)_n$

(3) (i) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) |U_{n+1} - 4| \leq \frac{1}{3}|U_n - 4|$

(ii) بين بالترجع أن $(\forall n \in \mathbb{N}) |U_n - 4| \leq 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$

(4) (i) بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية محددًا أساسها q

(ii) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n = \frac{7^n + 8}{7^n + 2}$

التمرين الثالث

ليكن f التطبيق المعرف من $D = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ نحو \mathbb{R} بما يلي : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x-1}}$

(1) حل في D المعادلة $f(x) = \sqrt{2}$ هل التطبيق f تبايني ؟

(2) أنشر $\left(\sqrt{2x-1} - 1\right)^2$ واستنتج أن $f(D) \subset [1, +\infty[$. هل f شمولي من D نحو \mathbb{R} ؟

(3) ليكن g قصور f على المجال $I = [1, +\infty[$

(i) أنشر $(2x-1)\left(y - \frac{1}{2}\right)$ و بين أن $2xy - x - y > 0$ ($\forall (x, y) \in I^2$)

(ii) بين أن g تبايني على I

(4) (i) بين أن $(\forall y \in]1, +\infty[) y^2 - y\sqrt{y^2 - 1} < 1$

(ii) بين أن g تقابل من I نحو I و عرف تقابله العكسي g^{-1}