

### التمرين الأول

نعتبر المتتالية  $(U_n)_n$  المعرفة بما يلي :  $U_0 = 3$  و  $U_{n+1} = \frac{U_n + 6}{U_n + 2}$

أ- بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n \geq 1$

ب- بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) U_{2n+1} < 2 < U_{2n}$

2) نضع  $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 3}$  لكل عدد طبيعي  $n$ . بين أن  $(V_n)_n$  متتالية هندسية محددًا أساسها و أحسب  $V_n$  بدلالة  $n$

3) أ- بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) |U_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{3} |U_n - 2|$

ب- استنتج أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) |U_n - 2| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

5) لكل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم نضع  $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n} U_{2k+1}$

أ- بين أن  $(\forall k \in \mathbb{N}) 2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{9}\right)^k \leq U_{2k+1} \leq 2$

ب- استنتج أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) 2 + \frac{13}{8n} + \frac{1}{24n} \left(\frac{1}{9}\right)^n \leq a_n \leq 2 + \frac{2}{n}$

### التمرين الثاني

ليكن  $\alpha$  من المجال  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  و بحيث  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$

1) بين أن  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$

2) أ- بين أن  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

ب- استنتج أن  $\cos 3\alpha = \sin \alpha$

3) حل في  $[0, 2\pi]$  المعادلة  $\cos 3x = \sin x$  ثم استنتج أن  $\alpha = \frac{\pi}{8}$

4) حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $\cos x - (\sqrt{2} - 1) \sin x = \sqrt{2} - \sqrt{2}$

### التمرين الثالث

أحسب النهايات التالية :  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x^3 + 8}$  ،  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 + x - 5}{x^2 - x}$  ،  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 3 + \sqrt{x} - 3}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x^2 + 4} \cos 2x - 2}{x \sin 3x}$  ،  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 3\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2 + 4} - 2x}$  ،  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 4x} + x$

### التمرين الرابع

المستوى  $(P)$  منسوب لمعلم متعامد ممنظم مباشر  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . نعتبر المتجهتين  $\vec{u} = \sqrt{2}\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j}$  و  $\vec{v} = \vec{i} + (2 - \sqrt{3})\vec{j}$

1) حدد الكتابة المثلثية للمتجهة  $\vec{u}$

2) أ- تحقق أن  $\|\vec{v}\| = \sqrt{6} - \sqrt{2}$  و أحسب  $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

ب- أحسب  $\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$  و استنتج قياس الزاوية  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

3) بين أن  $[2\pi]$   $\widehat{(\vec{i}, \vec{v})} = \frac{\pi}{12}$  و استنتج قيمة كل من  $\sin \frac{\pi}{12}$  و  $\cos \frac{\pi}{12}$