

EXERCICE 1 (15 pts)

2 pts 1) Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \ln(e^3) + 2\ln(3e) + \ln\left(\frac{1}{9}\right) \quad , \quad B = \ln(\sqrt{3-\sqrt{2}} + 1) + \ln(\sqrt{3-\sqrt{2}} - 1) + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

4,5 pts 2) Résoudre dans l'ensemble \mathbb{R} les équations et les inéquations suivantes :

a) $\ln(2x) = \ln(x)$, b) $1 + 2\ln(x) > 0$, c) $(\ln(x))(2 - \ln(x)) > 0$, d) $\ln^2(x) - \ln(x) - 2 = 0$

4 pts 3) Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle I dans les cas suivants :

a) $f(x) = \sqrt{x} + \ln(x)$, b) $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$, c) $f(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, d) $f(x) = \ln(x^2 + x + 4)$

$I =]0, +\infty[$

$I =]1, +\infty[$

$I =]0, 1[$

$I = \mathbb{R}$

4,5 pts 4) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x + \ln^2(x)$, b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln(x)$, c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(x)}{x^3}$, d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{1+x^2}{2+x^2}\right)$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 + x + 2 + \ln(x)$, f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^3(x)$

EXERCICE 2 (5 pts)

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$

Et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité 2cm)

0,5 pts 1) Montrer que le domaine de définition de la fonction f est : $D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

0,5 pts 2) Montrer que la fonction f est impaire

0,75 pts 3) a) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ et interpréter le résultat

$\frac{1}{2}$

0,5 pts b) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = +\infty$ et interpréter géométriquement le résultat

0,5 pts 4) a) Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]1, +\infty[$ et que :

$$(\forall x \in]1, +\infty[) \quad f'(x) = \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

0,25 pts b) Dédurre que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]1, +\infty[$

1 pt 5) Tracer la courbe (C) (on admet que la courbe (C) admet deux points d'inflexion : $A\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$

$$\text{Et } B\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$$

6) Soit la fonction g restriction de la fonction f sur l'intervalle $]1, +\infty[$

0,5 pts a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} en déterminant son domaine de

Définition

0,5 pts b) Montrer que la fonction g^{-1} est dérivable en $\sqrt{2}$ puis calculer $(g^{-1})'(\sqrt{2})$

(Remarquer que $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$)