

# Devoir Surveillé 2

Niveau : 2BacSP

Prof : Abdessamad Rouchad

## Partie I :

Soit la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = x(\sqrt{x} - 2)^2$$

- 1) a) Déterminer  $D_f$
- b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et déduire la branche infinie de  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$ .
- 2) a) Étudier la dérivabilité de  $f$  en  $0^+$ , puis interpréter le résultat géométriquement.
- b) Écrire l'équation de  $(T)$  la demi-tangente à  $(C_f)$  au point d'abscisse 0, à droite.
- 3) a) Étudier la dérivabilité de  $f$  sur  $D_f$ , et montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : f'(x) = 2(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 1)$$

- b) Calculer  $f'(4)$  et  $f'(1)$  puis interpréter géométriquement chacun des résultats.
- c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 4) a) Montrer que  $(C_f)$  coupe l'axe  $(OX)$  en deux points  $A$  et  $B$ . à déterminer.
- b) Étudier la position relatives de  $(C_f)$  et l'axe des abscisses.
- 5) a) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) : f(x) - x = x(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 3)$$

- b) Déduire que  $(C_f)$  coupe la droite  $(D) : y = x$  en trois points  $A$ ;  $E$  et  $F$ .
- c) Étudier la position relative de  $(C_f)$  et la droite  $(D)$ .
- 6) a) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : f''(x) = \frac{2\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x}}$$

- b) Déduire la concavité de  $(C_f)$  et montrer que  $(C_f)$  admet un point d'inflexion  $I$  et donner ses coordonnées.
- 7 Tracer dans le même repère : la demi-tangente  $(T)$ , la droite  $(D)$  et la courbe  $(C_f)$ .

## Partie II :

On définit la suite  $(u_n)$  par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = f(u_n) \text{ et } u_0 = \frac{1}{2}$$

- 1) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq 1$
- 2) Montrer que  $(u_n)$  est croissante et qu'elle est convergente.
- 3) Calculer la limite de la suite  $(u_n)$