

**Exercice 1**

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies par :  $f(x) = \frac{x+2}{x}$  et  $g(x) = x^2 + 2x$

**Partie (1)**

- 1) a) dresser le tableau de variation de chacune des fonctions  $f$  et  $g$  (1.5 pt)
- b) quelle est la nature des courbes  $(C_f)$  ;  $(C_g)$  et leurs éléments caractéristiques (1.5 pt)
- 2) a) résoudre l'équation  $f(x) = g(x)$  (1 pt)
- b) en déduire que  $(C_f)$  et  $(C_g)$  se coupent en trois points à déterminer (1 pt)
- 3) a) tracer dans un même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  les deux courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$  (2 pts)
- b) résoudre graphiquement l'inéquation  $\frac{2}{x} \geq (x+1)^2 - 2$  (1.5 pt)

**Partie (2)**

Soit  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$\begin{cases} F(x) = f(x) & \text{si } x \notin [-2, 1] \\ F(x) = g(x) & \text{si } x \in [-2, 1] \end{cases}$$

- 1) a) dresser le tableau de variation de  $F$  (1 pt)
- b) tracer dans un repère  $(O', \vec{i}, \vec{j})$  la courbe représentative de la fonction  $F$  (1.5 pt)
- 2) discuter suivant  $m$  le nombre de solutions de l'équation  $F(x) = m$  (1.5 pt)
- 3) on pose  $h(x) = \frac{1}{x}$ 
  - a) résoudre dans  $\mathbb{R}^*$  :  $-2 \leq \frac{1}{x} \leq 1$  (1.5 pt)
  - b) exprimer  $(F \circ h)(x)$  en fonction de  $x$  (2 pts)

**Exercice 2**

On considère la fonction  $G$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $G(x) = E(2x) - E(x) - E\left(x + \frac{1}{2}\right)$

- 1) vérifier que  $T = 1$  est une période de  $G$  (1 pt)
- 2) exprimer  $G(x)$  dans chacun des intervalles  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  et  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  (1.5 pt)
- 3) en déduire que  $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad E(x) + E\left(x + \frac{1}{2}\right) = E(2x)$  (1.5 pt)

**Exercice « bonus »**

- 1) Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs. Montrer que  $\frac{a}{a^4 + b^2} + \frac{b}{b^4 + a^2} \leq \frac{1}{ab}$
- 2)  $a, b$  et  $c$  trois réels strictement positifs tels que  $(a+1)(b+1)(c+1) = 8$  montrer que  $abc \leq 1$