EXERCICE 1

Soit $(U_n)_n$ la suite réelle définie par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{2}{3 - U_n} \end{cases}$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 < U_n < 2$

2) vérifier que $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(U_n - 1)(U_n - 2)}{3 - U_n}$ en déduire la monotonie de $(U_n)_n$

3) on pose $V_n = \dfrac{2 - U_n}{1 - U_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique et calculer V_n puis U_n en fonction de n

4) pour tout entier naturel n on pose $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{p=0}^{p=n} U_p$

a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} - 1 \leq \dfrac{2}{3}(U_n - 1)$

b) prouver que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n - 1 \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

c) en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1 + \dfrac{1}{n} \leq S_n \leq 1 + \dfrac{5}{2n} - \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

EXERCICE 2

On considère la suite $(U_n)_n$ telle que : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 3} \end{cases}$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad -1 < U_n \leq 0$
2. étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$
3. on pose $V_n = \dfrac{1}{1 + U_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

   montrer que $(V_n)_n$ est une suite arithmétique et déterminer V_n puis U_n en fonction de n
4. pour tout entier non nul n on pose $S_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{k=n} V_k$ montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \left|S_n - \dfrac{1}{4}\right| \leq \dfrac{3}{n}$

EXERCICE 3

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{k}{3^k}$ pour tout entier non nul n

1) calculer U_1 ; U_2

2) a) montrer par récurrence que $(\forall p \geq 2) \quad p \leq \left(\dfrac{3}{2}\right)^p$

b) en déduire que $(U_n)_n$ est majorée par 1