Groupe scolaire GAUSS	Contrôle N° 2	1BAC SM

Exercice 1

Soit la suite $(U_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = -1 \quad ; \quad U_1 = 2 \\ 6U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \end{cases}$$

1) on pose $2V_n = 2U_{n+1} - U_n$

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{3}$ **1.5 pt**

b) en déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2U_{n+1} = U_n + 5\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$ **1 pt**

2) on pose $W_n = U_n - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

a) montrer que $(W_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q' = \frac{1}{2}$ **1.5 pt**

b) en déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$ **1 pt**

3) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=0}^{k=n-1} U_k = \frac{7}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$ **1.5 pt**

Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$

et on pose $I = [1,2]$

1) a) montrer que $(\forall x \in I) \quad f(x) \in I$ **1 pt**

b) résoudre dans I l'équation $f(x) = x$ **1 pt**

2) on considère la suite $(U_n)_n$ définie par :

$$U_0 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad U_{n+1} = f(U_n)$$

a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 \le U_n \le 2$ **1 pt**

b) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \left|U_{n+1} - \sqrt{2}\right| \le \frac{1}{4}\left|U_n - \sqrt{2}\right|$$ **1 pt**

c) en déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \left|U_n - \sqrt{2}\right| \le \left(\frac{1}{4}\right)^n$$ **1 pt**

3) on pose $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} U_k$ montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \left|S_n - \sqrt{2}\right| \le \frac{4}{3n}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$$ **1.5 pt**

4) on pose $W_n = \frac{U_n - \sqrt{2}}{U_n + \sqrt{2}}$

a) montrer que $(W_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ **1 pt**

b) en déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^{n+2} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{n+2}}{\left(\sqrt{2}+1\right)^{n+2} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{n+2}} \times \sqrt{2}$$ **1 pt**

Exercice 3

Soit $(X_n)_n$ la suite réelle définie par : $X_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k^2}{3^k}$

1) calculer X_1 *et* X_2 **1.5 pt**

2) montrer que $(X_n)_n$ est croissante **0.5 pt**

3) a) montrer par récurrence que :

$$(\forall p \ge 3) \quad 2^{p+1} > p^2$$ **1.5 pt**

b) en déduire que $(\forall, \in \mathbb{N}^*) \quad X_n \le \frac{23}{9}$ **1.5 pt**

BONUS

On pose : $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+k}$; $V_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2+k}$

et $W_n = \sum_{k=3n+1}^{k=5n+1} \frac{1}{k}$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad V_n \ge \frac{1}{2}$ **2 pts**

2) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad W_n < \frac{2}{3}$ **2 pts**

3) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad U_n < \frac{3}{4}$ **2 pts**