2017-16	فرض رقم 4	الأولى علوم رياضية

فرض رقم الأولى علوم رياضية

التمرين الأول

On considère les ensembles : $A=\{6k+1 / k\in\mathbb{Z}\}$; $B=\{3k'-2 / k'\in\mathbb{Z}\}$ et $C=\{4p+3 / p\in\mathbb{Z}\}$

1) montrer que $A\subset B$. est-ce qu'on a $A=B$?
2) vérifier que $19\in B\cap C$ et déterminer en extension l'ensemble $B\cap C$

التمرين الثاني

Soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0=3$; $U_{n+1}=\dfrac{U_n-8}{2U_n-9}$. on pose $V_n=\dfrac{U_n-1}{U_n-4}$

1) vérifier que $(\forall n\in\mathbb{N})\ U_{n+1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{7}{2(2U_n-9)}$ et montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\ 1<U_n<4$

2) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\ U_n-U_{n+1}=\dfrac{2(U_n-1)(U_n-4)}{2U_n-9}$; étudier la monotonie de $(U_n)_n$

3) a) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\ |U_{n+1}-4|\le\dfrac{1}{3}|U_n-4|$

b) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\ |U_n-4|\le 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

4) a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1}{7}$

b) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\ U_n=\dfrac{7^n+8}{7^n+2}$

التمرين الثالث

Soit f l'application de $D=\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ vers $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2x-1}}$

1) résoudre dans D l'équation $f(x)=\sqrt{2}$. f est-elle injective ?

2) développer $\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2$ et déduire que $f(D)\subset[1,+\infty[$ $f(D)\subset[1,+\infty[$.

est-elle surjective de D vers $\mathbb{R}$?

3) soit g la restriction de f sur $I=[1,+\infty[$

a) développer $(2x-1)\left(y-\dfrac{1}{2}\right)$ et montrer que $(\forall(x,y)\in I^2)\ 2xy-x-y>0$

b) montrer que est injective sur I

4) a) montrer que $(\forall y\in]1,+\infty[)\ y^2-y\sqrt{y^2-1}<1$

b) montrer que g est une bijection de I vers I et définir sa réciproque g^{-1}