	Devoir 1	2016-2015

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1}\frac{3\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-3} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{2x+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x^2+2}-\sqrt[3]{x+1}}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\left(E\left(\frac{2}{x}\right)-E\left(\frac{-1}{x}\right)\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x\left(\arctan 2x-\arctan x\right)$$

Exercice 2

1) montrer que $\left(\forall (a,b)\in \left]0,1\right[^2\right)$ $\arctan a+\arctan b=\arctan\dfrac{a+b}{1-ab}$

2) déduire que $3\arctan\dfrac{1}{3}=\arctan\dfrac{13}{9}$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-\sin x$

1) calculer les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) étudier le sens de variation de f et déduire que f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

3) a) soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. montrer que $(\exists!\alpha_n\in\mathbb{R})$ $\sin\alpha_n=\alpha_n-\dfrac{1}{n}$

b) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $0<\alpha_{n+1}<\alpha_n$

Exercice 4

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$.

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{\sin^{2n}x}{(1-\cos x)(1-\cos^2 x)\times\dots\dots\times(1-\cos^n x)}$

1)a) montrer que $(\forall p\in\mathbb{N}^*)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos^p x}=\dfrac{2}{p}$

b) déduire que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{2^n}{n!}$

2) a) montrer que si p est impair alors $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos^p x}=0$

b) montrer que si p est un nombre pair alors $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos^p x}=\dfrac{2}{p}$

3) déduire que $\lim\limits_{x\to\pi} f(x)=0$