استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,0 ن)

لدينا صندوقان U و V . الصندوق U يحتوي على 4 كرات حمراء و 4 كرات زرقاء. الصندوق V يحتوي على كرتين حمراوين و 4 كرات زرقاء.

نعتبر التجربة العشوائية التالية : " نسحب عشوائيا كرة من الصندوق U : إذا كانت حمراء نضعها في الصندوق V ثم نسحب عشوائيا كرة من الصندوق V . و إذا كانت زرقاء نضعها جانبا ثم نسحب عشوائيا كرة من الصندوق V " .

نعتبر الأحداث التالية :

- R_1 : " الكرة المسحوبة من U حمراء " .
- B_1 : " الكرة المسحوبة من U زرقاء ".
- R_2 : " الكرة المسحوبة من V حمراء "
- B_2 : " الكرة المسحوبة من V زرقاء " .

1,00 ن — 1 أحسب احتمال الحدثين R_1 و B_1 .

1,00 ن — 2 أحسب احتمال B_2 علما أن R_1 محقق، و احتمال B_2 علما أن B_1 محقق.

0,50 ن — 3 بين أن : $P(B_2)=\dfrac{13}{21}$

0,50 ن — 4 استنتج $P(R_2)$.

التمرين الثاني : (4,5 ن)

ليكن θ عددا حقيقيا بحيث : $0 \le \theta \le 2\pi$ و نضع : $p = 5\cos\theta + 3i\sin\theta$

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) التالية : $\boxed{(E):\ z^2 - 2pz + 16 = 0}$

0,50 ن — 1 (أ) تحقق أن : $p^2 - (3\cos\theta + 5i\sin\theta)^2 = 16$

0,50 ن — (ب) أوجد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) بحيث : $|z_1| < |z_2|$

2 المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقطتين M_1 و M_2 اللتين لحقاهما على التوالي هما : z_1 و z_2 .

0,50 ن — (أ) بين أنه عندما يتغير العدد θ في $[0;2\pi[$ فإن النقطة M_1 تتغير على دائرة $(\mathscr{C})$ ينبغي تحديد معادلة لها.

0,50 ن — (ب) لتكن P منتصف القطعة $[M_1M_2]$. و لتكن (Γ) مجموعة النقط P عندما يتغير العدد θ في المجال $[0;2\pi[$

بين أن (Γ) إهليلج بؤرتاه هما النقطتان F و F' اللتان لحقاهما على التوالي هما 4 و -4 .

0,50 ن	③ⓐ بين أنه لكل عددين عقديين a و b من $\mathbb{C}\setminus\{4\}$ لدينا : $(ab=16) \iff \left(\frac{b+4}{b-4}\right) = -\left(\frac{a+4}{a-4}\right)$
0,50 ن	ب استنتج أن : $\left(\frac{z_2+4}{z_2-4}\right) = -\left(\frac{z_1+4}{z_1-4}\right)$
0,50 ن	ج بين أن : $\left(\overrightarrow{M_1F};\overrightarrow{M_1F'}\right) \equiv \pi + \left(\left(\overrightarrow{M_2F};\overrightarrow{M_2F'}\right)\right)[2\pi]$
0,50 ن	④ⓐ بين أن معادلة المماس (T) للمنحنى (Γ) في النقطة P هي : $3x\cos\theta + 5y\sin\theta = 15$
0,50 ن	ب بين أن : المماس (T) عمودي على المستقيم (M_1M_2) .
	التمرين الثالث : (3,0 ن)
	لكل زوج (a,b) من $\mathbb{Z}^2$ نعتبر المصفوفة : $M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}$
	في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ لتكن E مجموعة المصفوفات المعرفة بما يلي : $\boxed{E = \left\{M_{(a,b)} \ / \ a^2-2b^2=1\right\}}$
0,25 ن	① نضع : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$ تحقق أن : $A \in E$
0,50 ن	②ⓐ بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ و أن القانون $\times$ تبادلي في E .
0,50 ن	ب بين أن جميع عناصر E تقبل مقلوبا في E بالنسبة لقانون التركيب الداخلي $\times$.
0,50 ن	ج بين أن $(E,\times)$ زمرة تبادلية .
	③ نضع : $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $A^{n+1} = A^n \times A$; $(\forall n\in\mathbb{N})$
	نعتبر المجموعة $\boxed{G = \{A^n \ / \ n\in\mathbb{N}\}}$
0,25 ن	ⓐ تحقق أن : $G \subset E$
0,50 ن	ب لتكن H مجموعة مماثلات مصفوفات G بالنسبة لعملية $\times$ في E .
	بين أن : $H = \{B^n \ / \ n\in\mathbb{N}\}$ حيث : $B = \begin{pmatrix} 3 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$
0,50 ن	ج بين أن : $G \cup H$ زمرة جزئية من $(E,\times)$.
	التمرين الرابع : (9,5 ن)
	(I) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$. نعتبر الدالة العددية g_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $\boxed{g_n(x) = x + e^{-nx}}$
	و ليكن $(\mathcal{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة g_n في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.
0,50 ن	①ⓐ أدرس تغيرات الدالة g_n .
0,50 ن	ب بين أن g_n تقبل قيمة دنيا عند عدد حقيقي u_n يتم تحديده بدلالة n .
0,50 ن	②ⓐ أحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} g_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$

ب) حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathscr{C}_n)$	0,50 ن
3) أ) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$ الممثلين للدالتين g_1 و g_2	0,50 ن
ب) أرسم في نفس المعلم المنحنيين $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$.	0,50 ن
(نأخذ : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\ cm$ و نعطي : $\ln 2 \approx 0{,}7$)	
4) أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء، أحسب بدلالة x التكامل : $I(x) = \int_0^x te^{-2t}\,dt$	1,00 ن
ب) لتكن h_2 قصور الدالة g_2 على المجال $[0, \ln 2]$	0,50 ن
أحسب حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران التمثيل المبياني لـ h_2 حول محور الأفاصيل.	
5) نضع : $v_n = g_n(u_n)$	1,00 ن
بين أن المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربتان و حدد نهايتيهما.	
(II) نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\boxed{f_n(x) = x + e^{nx}}$	
و ليكن (Γ_n) منحنى الدالة f_n في معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$	
1) أدرس تغيرات الدالة f_n .	0,50 ن
2) إستنتج أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n	0,50 ن
3) أ) بين أن $\alpha_1 \in \left]-\ln 2 ; \frac{-1}{2}\right[$	0,50 ن
ب) بين أن : $(x - \alpha_1)$ و $(e^x + \alpha_1)$ لهما نفس الإشارة.	0,50 ن
4) أ) لتكن φ الدالة العددية المعرفة على $\left]-\infty ; \frac{-1}{2}\right]$ بما يلي : $\varphi(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}x$	0,50 ن
بين أن الدالة φ تناقصية على المجال $\left]-\infty ; \frac{-1}{2}\right]$	
ب) استنتج أن : $\|e^x + \alpha_1\| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}\|x - \alpha_1\|$	0,50 ن
5) نضع : $\beta_0 = \frac{-1}{2}$ و لكل عدد صحيح طبيعي n : $\beta_{n+1} = -e^{\beta_n}$	
أ) بين أنه يوجد عدد حقيقي a بحيث : $(\forall n\in\mathbb{N})\ :\ \|\beta_{n+1} - \alpha_1\| \leq a\|\beta_n - \alpha_1\|$	0,50 ن
ب) بين أن المتتالية $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها .	0,50 ن