الامتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة الاستدراكية 2004

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 10
مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (2,5 ن)

يحتوي كيس على 10 كرات بيضاء و 10 كرات حمراء لا يمكن التمييز بينها باللمس، نسحب عشوائيا كرة من الكيس . إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء نعيدها إلى الكيس و إذا كانت بيضاء نضع بدلها 3 كرات حمراء في الكيس ثم نسحب كرة من الكيس.

① أحسب الإحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان حمراوين. 0,50 ن

② أحسب الإحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان بيضاوين. 0,50 ن

③ أحسب الإحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين. 0,75 ن

④ أحسب الإحتمال لكي تكون الكرة الأولى المسحوبة بيضاء علما أن الكرة الثانية المسحوبة بيضاء. 0,75 ن

التمرين الثاني : (3,0 ن)

① حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة $\boxed{(E) \;:\; 3x-2y=1}$. 0,75 ن

② ليكن $n\epsilon\mathbb{N}$.

أ) بين أن : $(14n+3\;,\;21n+4)$ حل للمعادلة (E) . 0,25 ن

ب) استنتج أن العددين $(14n+3)$ و $(21n+4)$ أوليان فيما بينهما . 0,50 ن

③ ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين $(2n+1)$ و $(21n+4)$.

أ) بين أن : $d=1$ أو $d=13$. 0,50 ن

ب) بين أن : $n\equiv 6[13] \;\Leftrightarrow\; d=13$. 0,25 ن

④ من أجل كل عدد صحيح طبيعي n بحيث $n\geq 2$ نضع :

$\boxed{A=21n^2-17n-4}$ و $\boxed{B=28n^3-8n^2-17n-3}$

أ) بين أن العددين A و B قابلين للقسمة على $(n-1)$ في المجموعة $\mathbb{Z}$. 0,25 ن

ب) حدد حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر لـ A و B . 0,50 ن

التمرين الثالث : (4,0 ن)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$

① ليكن a عددا عقديا غير منعدم مكتوب في شكله الجبري التالي : $a = \alpha + i\beta$.

لتكن $(\mathcal{H})$ مجموعة النقط M التي لحقها z يحقق : $z^2 - (\bar{z})^2 = a^2 - (\bar{a})^2$.

أ) حدد طبيعة $(\mathcal{H})$. — 0,50 ن

ب) أنشىء $(\mathcal{H})$ في الحالة : $a = 1 + i$. — 0,50 ن

② لتكن $(\mathscr{C})$ مجموعة النقط M التي لحقها z يحقق $(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = 4a\bar{a}$.

أ) حدد طبيعة $(\mathscr{C})$. — 0,75 ن

ب) أنشىء $(\mathscr{C})$ في الحالة : $a = 1 + i$. — 0,25 ن

③ نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ النظمة التالية :

$$(S) : \begin{cases} z^2 - (\bar{z})^2 = a^2 - (\bar{a})^2 \\ (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = 4a\bar{a} \end{cases}$$

نضع : $u = z - a$.

أ) بين أن النظمة (S) تكافىء النظمة : — 0,75 ن

$$(S') : \begin{cases} u\bar{u} = 4a\bar{a} \\ (u + 2a)(u^3 - 8a(\bar{a})^2) = 0 \end{cases}$$

ب) نضع $a = re^{i\theta}$ حيث $r > 0$ و $-\pi \leq \theta \leq \pi$. — 0,75 ن

حدد بدلالة r و θ ألحاق نقط تقاطع $(\mathscr{C})$ و $(\mathcal{H})$.

ج) استنتج أن تقاطع $(\mathscr{C})$ و $(\mathcal{H})$ يتضمن ثلاث نقط و هي رؤوس لمثلث متساوي الأضلاع . — 0,50 ن

التمرين الرابع : (10,5 ن)

(I) لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين بما يلي : $f(x) = 4xe^{-x\ln 2} - 2$ و $g(x) = \dfrac{\ln(2x)}{x}$

و ليكن $(\mathscr{C})$ و $(\mathcal{T})$ المنحنيين الممثلين للدالتين f و g على التوالي في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

① أ) أحسب نهايتي f عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$. — 0,75 ن

ب) حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathscr{C})$. — 0,50 ن

② أ) بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ f'(x) = 4(1 - x\ln 2)e^{-x\ln 2}$. — 0,75 ن

ب) اعط جدول تغيرات الدالة f . — 0,75 ن

بين أن العددين 1 و 2 هما الحلين الوحيدين للمعادلة $f(x) = 0$

③ أدرس الدالة g : الفروع اللانهائية – النهايات – التغيرات. — 0,75 ن

④ ارسم $(\mathscr{C})$ و $(\mathcal{T})$ في نفس المعلم . $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 4cm)$ — 0,50 ن

تحديد نقط الإنعطاف غير مطلوب نأخذ : $\dfrac{1}{\ln 2} \approx 1{,}4$ و $\dfrac{1}{e} \approx 0{,}4$ و $e \approx 2{,}7$ و $\ln 2 \approx 0{,}7$

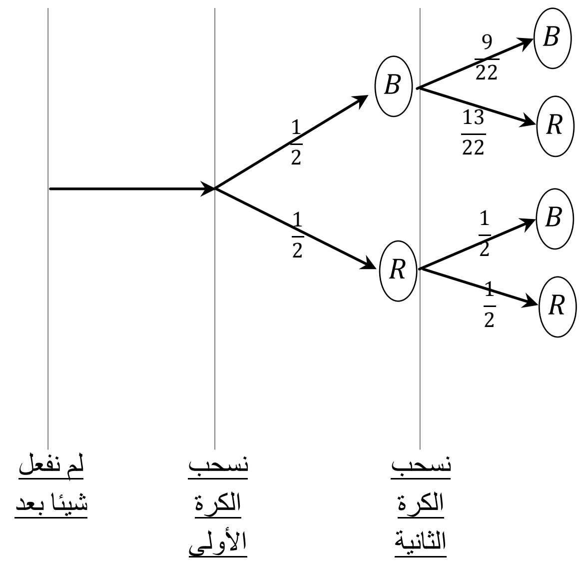
	(II) ليكن k عددا حقيقيا بحيث : $0 < k < \frac{2}{e}$	
0,75 ن	① (أ) تحقق مبيانيا أن المعادلة $g(x) = k$ تقبل حلين مختلفين لـ α و β بحيث : $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$	
0,75 ن	(ب) حدد قيمة k بحيث يكون α و β هما حلا المعادلة $f(x) = 0$.	
	نعتبر الدالة العددية f_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\boxed{f_k(x) = 4xe^{-kx} - 2}$.	
0,50 ن	② (أ) تأكد من أن : $f'_k(x) = 4(1 - kx)e^{-kx}$; $(\forall x \epsilon \mathbb{R})$.	
0,50 ن	(ب) إعط جدول تغيرات f_k .	
0,50 ن	③ (أ) استنتج أن المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين a و b . بحيث : $a < \frac{1}{k} < b$	
0,75 ن	(ب) بين أن $a = \alpha$ و $b = \beta$	
0,75 ن	④ (أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $(\forall t \epsilon \mathbb{R})$; $\int_0^t xe^{-kx}\,dx = \frac{1}{k^2}(1 - kte^{-kt} - e^{-kt})$	
0,75 ن	(ب) أحسب التكامل : $I_k = \int_\alpha^\beta f_k(x)dx$ بدلالة α و β .	
0,50 ن	(ج) استنتج أن : $\ln(2\alpha) \cdot \ln(2\beta) \leq 1$	
0,75 ن	⑤ بين أنه إذا كان u و v عددان حقيقيان مختلفين موجبين قطعا . بحيث : $\frac{\ln(u)}{u} = \frac{\ln(v)}{v}$ فإن : $\ln(u) \cdot \ln(v) \leq 1$	

التمرين الأول : (2,5 ن)

■ ①

النموذج الأمثل لحل هذا التمرين هو شجرة الاحتمالات .

من معطيات التجربة العشوائية نستنتج شجرة الإحتمالات التالية :



لدينا حسب الشجرة : $P(R \cap R) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

■ ②

لدينا حسب الشجرة : $P(B \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{9}{22} = \frac{9}{44}$

■ ③

لدينا حسب الشجرة :

$$P(\text{لونين مختلفين}) = P(B \cap R) + P(R \cap B)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{13}{22} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{6}{11}$$

■ ④

نستعمل الاحتمال الشرطي التالي :

$$p_{B_2}(B_1) = \frac{p(B_1 \cap B_2)}{p(B_2)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{9}{22}}{\frac{1}{2} \times \frac{9}{22} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

التمرين الثاني : (3,0 ن)

■ ①

نلاحظ في البداية أن $(1,1)$ حل خاص للمعادلة (E)

لأن : $\boxed{3 \times 1 - 2 \times 1 = 1}$ $(*)$

ليكن (x, y) الحل العام للمعادلة (E) .

إذن : $\boxed{3x - 2y = 1}$ $(**)$

ننجز عملية الفرق بين المتساويتين $(*)$ و $(**)$ نحصل على :

$$3(x-1) - 2(y-1) = 0$$

و منه : $\boxed{3(x-1) = 2(y-1)}$ $\otimes$ إذن : $3 / 2(y-1)$

و بما أن : $3 \wedge 2 = 1$ فإنه حسب $(Gauss)$: $3 / (y-1)$

إذن : $y = 3k + 1 \ ; \ (\exists k \epsilon \mathbb{Z})$

نعوض y بقيمته في المتساوية $\otimes$ نحصل على : $3(x-1) = 2(3k)$

يعني : $x = 2k + 1$

عكسيا : لدينا $3(2k+1) - 2(3k+1) = 1$

و بالتالي :مجموعة حلول المعادلة تكتب على الشكل :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(2k+1 \,; 3k+1) \quad / \quad k \epsilon \mathbb{Z}\}}$$

■ ② أ

لدينا :

$$3(14n+3) - 2(21n+4) = 42n + 9 - 42n - 8 = 1$$

إذن $(14n+3 \,; 21n+4)$ حل للمعادلة (E) .

■ ② ب

بما أن : $3(14n+3) - 2(21n+4) = 1$

فإنه حسب $(Bezout)$: $(14n+3) \wedge (21n+4) = 1$

■ ③ أ

ليكن $(21n+4) \wedge (2n+1) = d$

باستعمال خوارزمية إقليدس نحصل على :

$$\begin{array}{c|c} (21n+4) & (2n+1) \\ \cline{2-2} (n-6) & 10 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} (2n+1) & (n-6) \\ \cline{2-2} 13 & 2 \end{array}$$

من هاتين الإقليديتين نستنتج أن :

$$(21n+4) \wedge (2n+1) = (2n+1) \wedge (n-6)$$
$$= (n-6) \wedge 13$$

إذن : $\boxed{d = (n-6)\wedge 13}$ $(\star)$

و منه : $d \,/\, 13$

و نعلم أن 13 عدد أولي إذن : $d = 13$ أو $d = 1$

■ ③ ب

إذا كان $d = 13$ فإنه حسب $(\star)$: $d \,/\, (n-6)$

(لأن d قاسم مشترك لـ 13 و $(n-6)$)

أي : $13 \,/\, (n-6)$ و منه : $n \equiv 6[13]$

■ ④ أ

نضع : $A = P(n) = 21n^2 - 17n - 4$

و : $B = Q(n) = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$

لدينا : $P(1) = Q(1) = 0$

إذن : 1 جذر للحدوديتين $P(n)$ و $Q(n)$ في $\mathbb{Z}$.

و منه : $P(n)$ و $Q(n)$ تقبلان القسمة على : $(n-1)$

■ ④ ب

بالاستعانة بالقسمة الأقليدية نحصل على :

$$A = (n-1)(21n+4)$$

$$B = (n-1)(28n^2+20n+3)$$

بعد تعميل ثلاثية الحدود $(28n^2+20n+3)$ نحصل على :

$$B = (n-1)(2n+1)(14n+3)$$

تذكير بخاصية مهمة :

$$\boxed{c \wedge a = 1 \implies (\forall b \in \mathbb{Z}) \; ; \; a \wedge b = a \wedge (bc)}$$

ليكن : $(21n+4) \wedge (2n+1)(14n+3) = d$

لدينا حسب السؤال ② ب $(14n+3) \wedge (21n+4) = 1$

إذن حسب الخاصية المذكورة :

$$(21n+4) \wedge (2n+1) = (21n+4) \wedge (2n+1)(14n+3)$$

و منه : $(21n+4) \wedge (2n+1) = d$

إذن حسب السؤال ③ أ $d = 13$ أو $d = 1$

الحالة الأولى : إذا كان $d = 13$.

إذن حسب السؤال ③ ب : $n \equiv 6[13]$

و لدينا : $(21n+4) \wedge (2n+1)(14n+3) = 13$

يعني :

$$\boxed{(n-1)(21n+4) \wedge (n-1)(2n+1)(14n+3) = 13(n-1)}$$

و منه : $\boxed{A \wedge B = 13(n-1)}$

الحالة الثانية : إذا كان $d = 1$ فإن : $n \not\equiv 6[13]$

و لدينا : $(21n+4) \wedge (2n+1)(14n+3) = 1$

يعني :

$$(n-1)(21n+4) \wedge (n-1)(2n+1)(14n+3) = (n-1)$$

و منه : $A \wedge B = (n-1)$

خلاصة :

$$\boxed{(\forall n \geq 2) \; ; \; A \wedge B = \begin{cases} 13(n-1) \; ; & si \quad n \equiv 6[13] \\ (n-1) \; ; & si \quad n \not\equiv 6[13] \end{cases}}$$

التمرين الثالث : (4,0 ن)

■ ① أ

نضع : $z = x + iy$

ننطلق من الكتابة : $z^2 - \bar{z}^2 = a^2 - \bar{a}^2$

$$\Leftrightarrow \quad (z-\bar{z})(z+\bar{z}) = (a-\bar{a})(a+\bar{a})$$

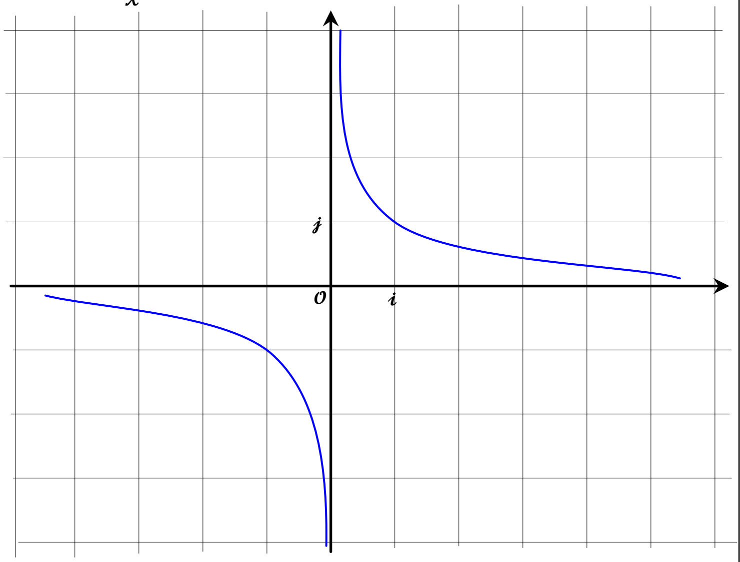
$$\Leftrightarrow \quad (2iy)(2x) = (2i\beta)(2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \quad xy = \alpha\beta$$

و منه المجموعة $(\mathcal{H})$ هذلول معادلته : $y = \dfrac{\alpha\beta}{x}$

■ ① ب

في حالة $a = (1+i)$ لدينا $(\mathcal{H})$ هذلول معادلته : $y = \dfrac{1}{x}$



■ 2 أ

ليكن : $z = x + iy$

ننطلق من الكتابة : $(z - \mathbb{a})(\bar{z} - \bar{\mathbb{a}}) = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}$

$$\Leftrightarrow \quad z\bar{z} - (z\bar{\mathbb{a}} + \mathbb{a}\bar{z}) + \mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2 + y^2) - (2\alpha x + 2\beta y) + \alpha^2 + \beta^2 = (2|\mathbb{a}|)^2$$

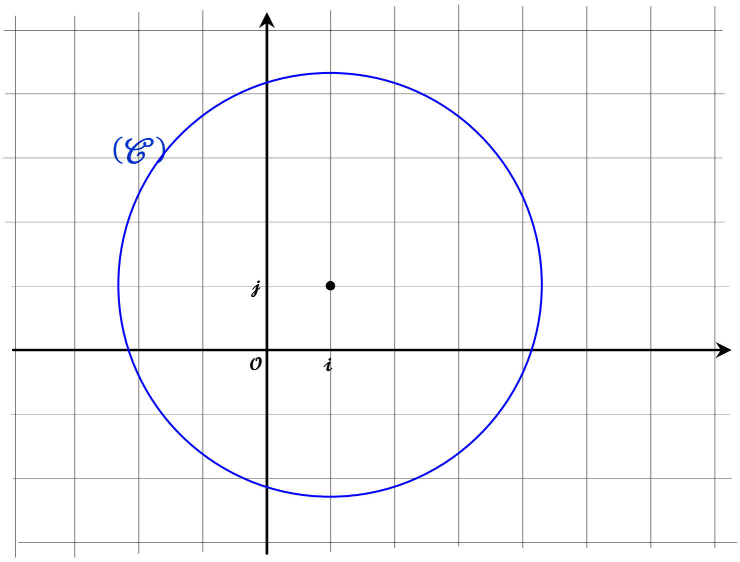
$$\Leftrightarrow \quad (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) + (y^2 - 2\beta y + \beta^2) = (2|\mathbb{a}|)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (2|\mathbb{a}|)^2$$

إذن : $(\mathscr{C})$ دائرة مركزها النقطة $C(\alpha, \beta)$ و شعاعها $r = 2|\mathbb{a}|$

■ 2 ب

في حالة $\mathbb{a} = (1 + i)$ لدينا $(\mathscr{C})$ دائرة مركزها $C(1,1)$ و شعاعها $2\sqrt{2}$



■ 3 أ

لدينا : $u = z - \mathbb{a}$ إذن : $\bar{u} = \bar{z} - \bar{\mathbb{a}}$

ننطلق من الكتابة :
$$\begin{cases} z^2 - \bar{z}^2 = \mathbb{a}^2 - \bar{\mathbb{a}}^2 \\ (z - \mathbb{a})(\bar{z} - \bar{\mathbb{a}}) = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z^2 - \mathbb{a}^2 = \bar{z}^2 - \bar{\mathbb{a}}^2 \\ (z - \mathbb{a})(\bar{z} - \bar{\mathbb{a}}) = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (z - \mathbb{a})(z + \mathbb{a}) = (\bar{z} - \bar{\mathbb{a}})(\bar{z} + \bar{\mathbb{a}}) \\ u\bar{u} = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} u(u + 2\mathbb{a}) = \bar{u}(\bar{u} + 2\bar{\mathbb{a}}) \\ u\bar{u} = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$$

لدينا حسب المعادلة الثانية : $\bar{u} = \dfrac{4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}}{u}$

نعوض $\bar{u}$ بقيمته في المعادلة الأولى نحصل على :

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} u(u + 2\mathbb{a}) = \dfrac{4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}}{u}\left(\dfrac{4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}}{u} + 2\bar{\mathbb{a}}\right) \\ u\bar{u} = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} u^2 + 2\mathbb{a}u - \left(\dfrac{4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}}{u}\right)^2 - 2\bar{\mathbb{a}}\left(\dfrac{4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}}{u}\right) = 0 \\ u\bar{u} = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} u^4 + 2\mathbb{a}u^3 - 16\mathbb{a}^2\bar{\mathbb{a}}^2 - 8\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}^2 u = 0 \\ u\bar{u} = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (u^4 - 8\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}^2 u) + (2\mathbb{a}u^3 - 16\mathbb{a}^2\bar{\mathbb{a}}^2) = 0 \\ u\bar{u} = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} u(u^3 - 8\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}^2) + 2\mathbb{a}(u^3 - 8\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}^2) = 0 \\ u\bar{u} = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\mathcal{S}') \quad \begin{cases} (u + 2\mathbb{a})(u^3 - 8\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}^2) = 0 \\ u\bar{u} = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$$

■ 3 ب

لنحل النظمة $(\mathcal{S}')$ بحيث : $\mathbb{a} = re^{i\theta}$

لدينا حسب المعادلة الثانية من النظمة $(\mathcal{S}')$:

$$(u + 2\mathbb{a})(u^3 - 8\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (u + 2\mathbb{a}) = 0 \quad \text{أو} \quad (u^3 - 8\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad u = -2re^{i\theta} \quad \text{أو} \quad u^3 = 8r^3e^{i\theta}$$

حلول المعادلة : $u^3 = 8\mathrm{r}^3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ هي الجذور النونية من الدرجة الثالثة للعدد للعقدي $8r^3e^{-i\theta}$ و التي تكتب بصفة عامة على شكل : $u_k = \left[\sqrt[3]{8r^3} \ , \ \dfrac{-\theta}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}\right]$. مع $k\{0,1,2\}$

و لدينا : $u_0 = \left[2r \ ; \ \dfrac{-\theta}{3}\right] = 2re^{\frac{-\theta}{3}}$

$$u_1 = \left[2r \ ; \ \frac{-\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right] = 2re^{\frac{-\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}}$$

$$u_2 = \left[2r \ ; \ \frac{-\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right] = 2re^{\frac{-\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}}$$

إذن حلول النظمة هي :

$$\boxed{-2re^{-i\theta}} \quad \boxed{2re^{\frac{-\theta}{3}}}$$

$$\boxed{2re^{\frac{-\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}}} \quad \boxed{2re^{\frac{-\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}}}$$

و نعلم أن : $z = u + a$

إذن القيم التي يأخذها z هي :

$\boxed{-re^{-i\theta}}$ $\boxed{2re^{\frac{-\theta}{3}} + re^{i\theta}}$

$\boxed{2re^{\frac{-\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}} + re^{i\theta}}$ $\boxed{2re^{\frac{-\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}} + re^{i\theta}}$

■ ③ ج

نضع : $z_0(A)$ و $z_1(B)$ و $z_2(C)$

نريد أن نبرهن على أن المثلث ABC متساوي الأضلاع .

لدينا :

$$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \frac{2r - 2rj}{2r\bar{j} - 2rj} = \frac{1-j}{\bar{j} - j} = \frac{1-j}{-\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = e^{\frac{-i\pi}{3}}$$

إذن : $\left|\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right| \equiv 1$ و $arg\left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right) \equiv \frac{-\pi}{3}[2\pi]$

و منه :

$|z_C - z_A| = |z_B - z_A|$ و $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{-\pi}{3}[2\pi]$

و بالتالي : ABC مثلث متساوي الأضلاع (غير مباشر)

التمرين الرابع : (10ن)

الجزء الأول

■ ① أ

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(4xe^{-xln2} - 2\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\left(\frac{4}{ln2}\right)\frac{1}{\left(\frac{e^{xln2}}{xln2}\right)} - 2\right)$$

$$= \left(\frac{4}{ln2}\right)\left(\frac{1}{0^-}\right) - 2 = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\left(\frac{4}{ln2}\right)\frac{1}{\left(\frac{e^{xln2}}{xln2}\right)} - 2\right)$$

$$= \left(\frac{4}{ln2}\right)\left(\frac{1}{+\infty}\right) - 2 = \boxed{-2}$$

■ ① ب

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(4e^{-xln2} - \frac{2}{x}\right) = +\infty$$

بما أن : $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

فإن : $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب

و بما أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$

فإن المستقيم ذو المعادلة $y = -2$ مقارب أفقي بجوار $+\infty$

■ ② أ ب

$$f'(x) = 4(1 - xln2)e^{-xln2}$$

لدينا : $4e^{-xln2} > 0$; $(\forall x\epsilon\mathbb{R})$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1 - xln2)$

إذا كان : $x = \frac{1}{ln2}$ فإن : $f'(x) = 0$

إذا كان : $x > \frac{1}{ln2}$ فإن : $f'(x) < 0$

إذا كان : $x < \frac{1}{ln2}$ فإن : $f'(x) > 0$

و لدينا : $f\left(\frac{1}{ln2}\right) = \frac{4}{eln2} - 2$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$	$\frac{1}{ln2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$-\infty$ ↗	$\frac{4}{eln2}-2$	↘ -2

■ ② ج

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f :

f دالة متصلة و تزايدية قطعا على $\left]-\infty, \frac{1}{ln2}\right]$

إذن f تقابل من المجال $\left]-\infty, \frac{1}{ln2}\right]$ نحو المجال $f\left(\left]-\infty, \frac{1}{ln2}\right]\right)$

و لدينا : $f\left(\left]-\infty, \frac{1}{ln2}\right]\right) = \left]-\infty, \frac{4}{eln2} - 2\right] \approx \left]-\infty, \frac{1}{10}\right]$

و بما أن : $0 \,\epsilon \left]-\infty, \frac{1}{10}\right]$

إذن 0 يمتلك سابقا واحدا وحيدا بالتقابل f في المجال $\left]-\infty, \frac{1}{ln2}\right]$

و لدينا : $f(1) = 4e^{-ln2} - 2 = 0$

و $1 \,\epsilon \left]-\infty, \frac{1}{ln2}\right]$

و لدينا كذلك حسب جدول تغيرات الدالة f

f دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $\left[\frac{1}{ln2},+\infty\right[$

إذن f تقابل من $\left[\frac{1}{ln2},+\infty\right[$ نحو صورته $\left]-2,\frac{1}{10}\right]$

مع : $\frac{4}{eln2}-2\approx\frac{1}{10}$

و بما أن : $0\in\left]-2,\frac{1}{10}\right]$

فإن الصفر يمتلك سابقا وحيدا بالتقابل f في المجال $\left[\frac{1}{ln2},+\infty\right[$

و لدينا : $2\in\left[\frac{1}{ln2},+\infty\right[$ ولدينا : $f(2)=0$

خلاصة : العددان 1 و 2 هما الحلان الوحيدان للمعادلة $f(x)=0$

■ 3 أ

دراسة الدالة g : $g(x)=\frac{ln(2x)}{x}$

لدينا g دالة معرفة على المجال $]0,+\infty[$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{ln(2x)}{x}\right)=-\infty$

إذن محور الأراتيب مقارب عمودي لـ $(\mathcal{T})$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{ln(2x)}{x}\right)=0$

إذن محور الأفاصيل مقارب أفقي لـ $(\mathcal{T})$ بجوار $+\infty$

$$g'(x)=\frac{1-ln(2x)}{x^2}$$

إذا كان : $x=\frac{e}{2}$ فإن : $g'(x)=0$

إذا كان : $x>\frac{e}{2}$ فإن : $g'(x)<0$

إذا كان : $x<\frac{e}{2}$ فإن : $g'(x)>0$

و لدينا : $g\left(\frac{e}{2}\right)=\frac{2}{e}$

و نلخص النتائج في الجدول التالي :

x	0		$\frac{e}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	↗	$\frac{2}{e}$	↘	0

■ 3 ب

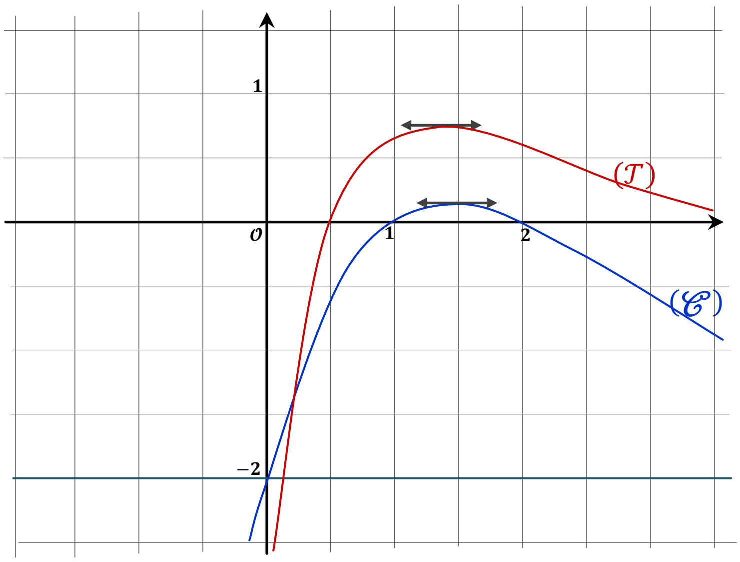
قبل رسم $(\mathcal{T})$ أضيف نقطة تقاطع $(\mathcal{T})$ مع محور الأفاصيل و التي يحقق أفصولها المعادلة $g(x)=0$

لنحل المعادلة : $g(x)=0$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{ln(2x)}{x}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad ln(2x)=ln(1)$$

$$\Leftrightarrow\quad x=\frac{1}{2}$$



الجزء الثاني

■ 1 أ

لدينا : $g'\left(\frac{e}{2}\right)=0$

إذن $(\mathcal{T})$ يقبل مماسا أفقيا في النقطة $\Omega\left(\frac{e}{2};\frac{2}{e}\right)$

و منه المستقيم $(\Delta):y=\frac{2}{e}$ يقطع $(\mathcal{T})$ في نقطة واحدة و هي Ω

و لدينا حسب الرسم المبياني : $(\mathcal{T})$ مقعر

إذن كل مستقيم $(D):y=k$ متواجد بين (Δ) و محور الأفاصيل يقطع $(\mathcal{T})$ في نقطتين

و بالتالي : المعادلة $g(x)=k$ تقبل حلين α و β مختلفين بشرط أن يكون : $0<k<\frac{2}{e}$

بما أن : $g\left(\frac{1}{2}\right)=0$ و α و β مختلفين فإن أحدهما أصغر من الآخر و نضع $\frac{1}{2}<\alpha<\beta$

■ ① ب

ليكن α و β حلا المعادلة $f(x) = 0$

بما أن : $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$

فإنه حسب السؤال ② ج من الجزء الأول: $\beta = 2$ و $\alpha = 1$

من جهة أخرى لدينا حسب السؤال ① أ من الجزء الثاني :

α و β هما حلا المعادلة $g(x) = k$

و منه : $g(1) = k$ و $g(2) = k$

أي : $ln2 = k$ و $ln4 = 2k$

و بالتالي : $k = ln2$

■ ② أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$

$$f_k'(x) = 4\left(e^{-kx} - kxe^{-kx}\right) = 4(1-kx)e^{-kx}$$

■ ② ب

x	$-\infty$	$\frac{1}{k}$	$+\infty$
$f_k'(x)$	$+$	0	$-$
f_k	$-\infty$ ↗	$\frac{4}{ke}-2$	↘ -2

■ ③ أ

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f_k :

f_k تقابل من $\left]-\infty;\frac{1}{k}\right[$ نحو $\left]-\infty;\frac{4}{ke}-2\right[$ لأنها متصلة و تزايدية قطعا

و لدينا : $0 \in \left]-\infty;\frac{4}{ke}-2\right[$

لأن :

لدينا : $0 < k < \frac{2}{e}$

إذن : $\frac{1}{k} > \frac{e}{2}$

و منه : $\frac{4}{ke} > 2$

أي : $\frac{4}{ke} - 2 > 0$

إذن 0 يمتلك سابقا وحيدا a في المجال $\left]-\infty;\frac{1}{k}\right[$ بالتقابل f_k

و بنفس الطريقة لدينا f_k تقابل من $\left]\frac{1}{k};+\infty\right[$ نحو $\left]-2;\frac{4}{ke}-2\right[$

لأنها متصلة و تناقصية قطعا على المجال $\left]\frac{1}{k};+\infty\right[$.

بما أن $0 \in \left]-2;\frac{4}{ke}-2\right[$ فإن الصفر يمتلك سابقا وحيدا b

من المجال $\left]\frac{1}{k};+\infty\right[$ بالتقابل f_k

يعني : $f_k(b) = 0$ و $b > \frac{1}{k}$

و بالتالي : المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين

a و b بحيث $a < \frac{1}{k} < b$

■ ③ ب

نلاحظ أن $f_{\ln 2}(x) = f(x)$

و نعلم أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين وحيدين و هما 1 و 2

إذن المعادلة $f_{\ln 2}(x) = 0$ تقبل كذلك حلين وحيدين فقط و هما 1 و 2

و لدينا المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين a و b

كيفما كان $0 < k < \frac{2}{e}$

إذن لدينا بالضرورة $a = 1$ و $b = 2$ لأن a و b وحيدين.

■ ④ أ

$$\int_0^t xe^{-kx}\,dx = \left[\frac{xe^{-kx}}{-k}\right]_0^t - \int_0^t \left(\frac{e^{-kx}}{-k}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t xe^{-kx}\,dx = \left[\frac{xe^{-kx}}{-k}\right]_0^t + \frac{1}{k}\left[\frac{e^{-kx}}{-k}\right]_0^t$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t xe^{-kx}\,dx = \left(\frac{te^{-kt}}{-k}\right) + \frac{1}{k}\left(\frac{e^{-kt}}{-k}\right) + \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t xe^{-kx}\,dx = \frac{1}{k^2}\left(1 - kte^{-kt} - e^{-kt}\right)$$

■ ④ ب

لدينا :

$$I_k = \int_\alpha^\beta f_k(x)dx = \int_\alpha^\beta \left(4xe^{-kx} - 2\right)dx$$
$$= 4\left(\int_\alpha^\beta xe^{-kx}\,dx\right) - 2(\beta - \alpha)$$

لدينا : $\int_{\alpha}^{\beta} xe^{-kx}\,dx = \int_{0}^{\beta} xe^{-kx}\,dx - \int_{0}^{\alpha} xe^{-kx}\,dx$

$$= \frac{1}{k^2}\left(1 - k\beta e^{-k\beta} - e^{-k\beta} - 1 + k\alpha e^{-k\alpha} + e^{-k\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{k^2}\left(k\alpha e^{-k\alpha} + e^{-k\alpha} - k\beta e^{-k\beta} - e^{-k\beta}\right)$$

و نعلم أن : $f_k(\alpha) = 0$ و $f_k(\beta) = 0$

إذن : $4\alpha e^{-k\alpha} - 2 = 0$ و $4\beta e^{-k\beta} - 2 = 0$

و منه : $\underset{(1)}{\boxed{2\alpha = e^{\alpha k}}}$ و $\underset{(2)}{\boxed{2\beta = e^{\beta k}}}$

بالرجوع إلى التعبير الأخير للتكامل $\int_{\alpha}^{\beta} xe^{-kx}\,dx$

نحصل على : $\int_{\alpha}^{\beta} xe^{-kx}\,dx = \frac{1}{k^2}\left(\frac{k\alpha}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha} - \frac{k\beta}{2\beta} - \frac{1}{2\beta}\right)$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} xe^{-kx}\,dx = \frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2\beta}\right)$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} xe^{-kx}\,dx = \frac{(\beta-\alpha)}{2\alpha\beta k^2}$$

و بالتالي بالرجوع إلى تعبير التكامل I_k نحصل على :

$$I_k = \int_{\alpha}^{\beta} f_k(x)dx = 4\left(\int_{\alpha}^{\beta}\left(xe^{-kx}\right)dx\right) - 2(\beta-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow I_k = \frac{4(\beta-\alpha)}{2\alpha\beta k^2} - 2(\beta-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow I_k = 2(\beta-\alpha)\left(\frac{1}{\alpha\beta k^2} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{I_k = \frac{2(\beta-\alpha)}{\alpha\beta k^2}(1-\alpha\beta k^2)}$$

■ 4 ج

بما أن α و β عددان حقيقيان موجبان قطعا و $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$

فإن التكامل I_k يقيس مساحة و منه I_k كمية موجبة.

إذن : $(1-\alpha\beta k^2) \geq 0$

يعني : $\boxed{(\alpha k)(\beta k) \leq 1}$ $(\star)$

باستعمال العلاقتين (1) و (2) نستنتج منهما :

$\boxed{(\alpha k) = ln(2\alpha)}$ و $\boxed{(\beta k) = ln(2\beta)}$

و بالتالي بالرجوع إلى $(\star)$ نحصل على :

$$\boxed{ln(2\alpha)\cdot ln(2\beta) \leq 1}$$

■ 5

ليكن u و v عددان حقيقيان مختلفان و موجبان قطعا بحيث :

$$\frac{ln(u)}{u} = \frac{ln(v)}{v}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ln\left(2\frac{u}{2}\right)}{2\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{ln\left(2\frac{v}{2}\right)}{2\left(\frac{v}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ln\left(2\frac{u}{2}\right)}{\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{ln\left(2\frac{v}{2}\right)}{\left(\frac{v}{2}\right)}$$

نضع : $\frac{ln\left(2\frac{u}{2}\right)}{\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{ln\left(2\frac{v}{2}\right)}{\left(\frac{v}{2}\right)} = k$

إذن العددان $\frac{u}{2}$ و $\frac{v}{2}$ هما حلين للمعادلة : $\frac{ln(2x)}{x} = k$

أو بتعبير آخر $\frac{u}{2}$ و $\frac{v}{2}$ هما حلين للمعادلة : $g(x) = k$

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة g :

$\frac{2}{e}$ قيمة قصوية للدالة g على المجال $]0;+\infty[$

إذن : $\forall x \in]0;+\infty[\;\; ; \;\; 0 \leq \frac{ln(2x)}{x} \leq \frac{2}{e}$

و منه : $0 \leq k \leq \frac{2}{e}$

لدينا إذن $\frac{u}{2}$ و $\frac{v}{2}$ هما حلا المعادلة : $g(x) = k$ بحيث $0 \leq k \leq \frac{2}{e}$

و بالتالي يمكننا تطبيق نتائج التمرين و خصوصا نتيجة السؤال 4 ج

إذن : $ln\left(2.\frac{u}{2}\right)\cdot ln\left(2.\frac{v}{2}\right) \leq 1$

و بالتالي : $\boxed{ln(u)\cdot ln(v) \leq 1}$

■ و الحمد لله رب العالمين ■