



استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,0 ن)

- ① ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .
- أ) بين أنه إذا كان n عددا فرديا فإن $n^2 \equiv 1[8]$. 0,50 ن
- ب) بين أنه إذا كان n عددا زوجيا فإن $n^2 \equiv 0[8]$ أو $n^2 \equiv 4[8]$. 0,50 ن
- ② ليكن a و b و c أعداد صحيحة طبيعية فردية .
- أ) بين أن $a^2 + b^2 + c^2$ ليس مربعا كاملا . 0,50 ن
- ب) بين أن : $2(ab + bc + ac) \equiv 6[8]$. 0,50 ن
- لاحظ أن : $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$
- ج) استنتج أن : $2(ab + bc + ac)$ ليس مربعا كاملا . 0,50 ن
- د) بين أن $(ab + bc + ac)$ ليس مربعا كاملا . 0,50 ن

التمرين الثاني : (3,0 ن)

لتكن E مجموعة المصفوفات التي تكتب على شكل :

$$M_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}} \left(a - \frac{1}{a} \right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

و F مجموعة المصفوفات المعرفة بما يلي :

$$N_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}} \left(a - \frac{1}{a} \right) \\ -a\sqrt{3} & -a \end{pmatrix}$$

- ① أ) بين أن : $M_a \times M_b = M_{ab}$; $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^{*2})$. 0,50 ن
- ب) ليكن φ التطبيق المعرف من \mathbb{R}^* نحو E بما يلي : $\varphi(a) = M_a$. 0,50 ن
- بين أن : φ تشاكل من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (E, \times) .
- ج) استنتج البنية الجبرية لـ (E, \times) . 0,50 ن
- ② أ) بين أن $N_a \times N_b = M_{\frac{b}{a}}$; $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^{*2})$. 0,50 ن
- ب) نضع $G = E \cup F$ ، بين أن : (G, \times) زمرة . 0,50 ن
- ج) هل (G, \times) زمرة تبادلية ؟ 0,50 ن

التمرين الثالث : (3,5 ن)

- ① حل في \mathbb{C} المعادلة : $z^2 + z + 1 = 0$. ن 0,75
 ② لكل عدد عقدي z حيث : $z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ نضع : $z' = \frac{1}{z^2 + z + 1}$

مع : $-\pi \leq \theta \leq \pi$ و $\theta \neq \frac{2\pi}{3}$ و $\theta \neq \frac{-2\pi}{3}$

- ① تحقق أن : $1 + z + z^2 = z(1 + z + \bar{z})$ ن 0,75
 ② احسب معيار و عمدة z' بدلالة θ . ن 0,75
 ③ نضع : $z' = x + iy$ حيث $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. ن 0,75
 ببين أن : $x^2 + y^2 = (1 - 2x)^2$.
 ④ استنتج أن M ذات اللق z' تنتمي إلى هذلول يتم تحديد مركزه و رأسيه و مقاربيه . ن 0,50

التمرين الرابع : (10 ن)

(I) نعتبر f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}^* بما يلي : $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$

- ① أحسب نهايات f عند محداث مجموعة تعريفها D_f . ن 0,50
 ② أدرس تغيرات الدالة f . ن 0,50
 ③ ليكن (\mathcal{C}) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم . ن 0,50
 أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (\mathcal{C}) . ن 0,50
 ④ أنشئ (\mathcal{C}) . ن 0,25

(II) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 f(u_n) = u_n e^{-u_n} ; (\forall n \in \mathbb{N}) \\ u_0 = 1 \end{cases}$

- ① بين أن : $e^x \geq x + 1 ; (\forall x \in \mathbb{R})$. ن 0,25
 ② استنتج أن : $x^2 f(x) \leq \frac{x}{x+1} ; (\forall x > 0)$. ن 0,25
 ③ أ) باستعمال البرهان بالترجع بين أن : $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1} ; (\forall n \in \mathbb{N})$. ن 0,50

- ب) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها . ن 0,75

④ نضع من أجل كل عنصر n من \mathbb{N}^* : $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$

- أ) بين أن : $v_n = \ln\left(\frac{1}{u_n}\right) ; (\forall n \in \mathbb{N}^*)$. ن 0,75

- ب) حدد نهاية المتتالية (v_n) . ن 0,50

(III) نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي :

$$F(0) = 2 \ln 2 \quad \text{و} \quad (\forall x > 0) ; F(x) = \int_{x^2}^{4x^2} f(t) dt$$

0,25 ن (أ) ① تحقق أن : $\int_{x^2}^{4x^2} \frac{1}{t} dt = 2 \ln 2$; $(\forall x > 0)$;

0,50 ن (ب) باستعمال نتيجة السؤال ① من الجزء الثاني بين أن : $-t < e^{-t} - 1 \leq 0$; $(\forall t > 0)$.

0,50 ن (أ) ② بين أن : $-3x^2 \leq F(x) - 2 \ln 2 \leq 0$; $(\forall x > 0)$.

0,25 ن (ب) استنتج أن F متصلة و قابلة للإشتقاق على اليمين في 0.

0,25 ن (أ) ③ بين أن $f(t) < e^{-t}$; $(\forall t \geq 1)$.

0,50 ن (ب) استنتج النهاية التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

0,75 ن (أ) ④ بين أن F قابلة للإشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ و احسب $F'(x)$.

0,50 ن (ب) اعط جدول تغيرات الدالة F .

0,50 ن (ج) أنشئ (\mathcal{E}_F) في معلم متعامد ممنظم .

0,50 ن (أ) ⑤ لتكن G الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $G(x) = \int_x^{4x} e^{-t} \ln t dt$

0,50 ن (أ) بين أن : $G(x) = F(\sqrt{x}) - e^{-4x} \ln(4x) + e^{-x} \ln(x)$; $(\forall x > 0)$.

0,50 ن (ب) أحسب النهاية التالية : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (e^{-x} - e^{-4x}) \ln x$

0,25 ن (ج) استنتج : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} G(x)$