استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (2,5 ن)

$x \wedge y$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y .

$\overline{abc}^{(x)}$ هي كتابة العدد abc في نظمة العد ذات الأساس x .

① نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E) \ : \ (x+1)^2 = 9 + 5y$.

0,50 ن ⓐ ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E) .

بين أن $x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 2[5]$.

0,50 ن ⓑ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

0,75 ن ② بين أن : $(5k^2+4k-1) \wedge (5k+1) = (K-3) \wedge 8 \ ; \ (\forall k \epsilon \mathbb{Z})$.

0,75 ن ③ حل في $\mathbb{N}^2$ النظمة التالية : $\begin{cases} \overline{121}^{(x)} = \overline{59}^{(y)} \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1[5] \end{cases}$

التمرين الثاني : (4,5 ن)

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر المنحنى $(\mathscr{C}_m)$ الذي معادلته هي :

$$\boxed{\frac{x^2}{(10-m)} + \frac{y^2}{(2-m)} = 1 \quad ; \quad m \epsilon \mathbb{R} \setminus \{2;10\}}$$

1,00 ن (I) ① ناقش حسب قيم m طبيعة المنحنى $(\mathscr{C}_m)$.

1,00 ن ② إذا كان $(\mathscr{C}_m)$ مخروطيا ، اعط عناصره المميزة (المركز و الرؤوس و البؤرتان و المقاربان إن وجدا)

0,25 ن ③ أرسم $(\mathscr{C}_1)$.

(II) نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(E) \ : \ z^2 - (6\cos\alpha)z + 1 + 8\cos^2\alpha = 0 \qquad \text{حيث :} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

0,50 ن ① حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) ; $(\mathfrak{Im}(z_1) > 0)$ و M_1 و M_2 النقطتان ذات اللحقين z_1 و z_2 على التوالي.

0,25 ن ② ⓐ تحقق أن : $M_1 \epsilon (\mathscr{C}_1)$.

0,75 ن ⓑ بين أنه توجد نقطتان P_1 و P_2 من $(\mathscr{C}_1)$ حيث يكون فيهما المماس للمنحنى $(\mathscr{C}_1)$ موازيا للمستقيم (OM_1) .

0,75 ن ⓒ تحقق أن : $OM_1{}^2 + OP_1{}^2 = OM_2{}^2 + OP_2{}^2$.

التمرين الثالث : (2,5 ن) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 20 .

يحتوي كيس على 10 كرات بيضاء و $(n-10)$ كرة سوداء ، نفترض أن كل الكرات غير قابلة للتمييز باللمس

نسحب كرة من الكيس و نسجل لونها ثم نعيدها إلى الكيس . نكرر هذه التجربة n مرة .نسمي p_k احتمال الحصول على k كرة بيضاء $(0 \leq k \leq n)$.

0,50 ن ① أحسب p_k بدلالة n و k .

② نضع : $u_k = \dfrac{p_{k+1}}{p_k}$ حيث : $k \epsilon \{0,1,\dots,(n-1)\}$.

0,50 ن ⓐ بين أن : $u_k = \dfrac{(n-k)}{(k+1)} \times \dfrac{10}{(n-10)}$

0,50 ن ⓑ بين أن : $\boxed{0 \leq k \leq 9 \iff u_k \geq 1}$ و $\boxed{10 \leq k \leq n-1 \iff u_k \leq 1}$

1,00 ن ⓒ استنتج أكبر قيمة M للعدد p_k عندما يتغير k في $\{0,1,\dots,n\}$.

و بين أن : $M = \dfrac{n!}{n^n} \times \dfrac{10^{10}}{10!} \times \dfrac{(n-10)^{n-10}}{(n-10)!}$

التمرين الرابع : (10,5 ن)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\boxed{f(x) = (1+x)e^{-2x}}$.

ليكن $(\mathscr{C})$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,50 ن (I) ① ⓐ أحسب : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

0,50 ن ⓑ أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C})$.

0,50 ن ② أدرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

0,50 ن ③ ⓐ أدرس تقعر المنحنى $(\mathscr{C})$.

0,50 ن ⓑ أنشىء $(\mathscr{C})$.

0,50 ن ④ ⓐ بين أن f حل للمعادلة التفاضلية $(E) : y'' + 3y' + 2y = -e^{-2x}$.

0,50 ن ⓑ حدد الحل العام للمعادلة (E) .

(II) ليكن $n\epsilon\mathbb{N}^*$ نرمز بـ A_n لمساحة الحيز المحصور بين $(\mathscr{C})$ و محور الأفاصيل و محور الأراتيب و المستقيم ذي المعادلة $x = n$.

1,00 ن ① أحسب A_n بدلالة n .

0,50 ن ② أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$

(III) لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم نضع : $\boxed{u_n = \int_0^n [f(x)]^n\, dx}$

0,75 ن ① باستعمال تقنية تغيير المتغير $(\,xn = t\,)$ بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ u_n = \int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t} dt$

0,50 ن ② أ بين أن : $(\forall r\epsilon[1;2])\ ;\ 2-r \le \frac{1}{r} \le 1$

0,75 ن ب استنتج : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\,,(\forall x\epsilon[0;n])\ ;\ x-\frac{x^2}{2n} \le n\,ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \le x$

0,50 ن ③ أ بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ u_n \le \int_0^n e^{-x}\,dx$

0,75 ن ب بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ e^{\frac{-1}{2\sqrt{n}}}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x}\,dx \le u_n$

0,75 ن ج استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ متقاربة و حدد نهايتها.

④ ليكن a عنصرا من المجال $]0,1[$.

0,50 ن أ بين أن : $\int_a^1 n\,[f(x)]^n dx \le n(1-a)[f(a)]^n$

0,50 ن ب استنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^1 n\,[f(x)]^n dx = 0$

0,50 ن ج أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n n\,[f(x)]^n dx$

التمرين الأول : (2,5 ن)

■ ① أ

ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E) .

هذا يعني أن : $(x+1)^2 = 9+5y$

و منه : $5/(x+1)^2-9$ أي : $5/(x+4)\,(x-2)$

و بما أن 5 عدد أولي :

فإن : $5/(x-2)$ أو $5/(x+4)$

و منه : $5/(x-2)$ أو $5/(x+4)-5$

يعني : $x\equiv 2[5]$ أو $x\equiv 1[5]$

■ ① ب

إذا كان : $x\equiv 1[5]$ فإن : $5/(x-1)$

و منه : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ x-1=5k$

يعني : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ x=5k+1$

و منه حسب المعادلة (E) : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ (5k+1+1)^2=9+5y$

يعني : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ 25k^2+4+20k=9+5y$

و منه : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ y=5k^2+4k-1$

إذا كان $x\equiv 2[5]$ فإن $5/(x-2)$

يعني : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ x-2=5k$

أي : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ x=5k+2$

و منه حسب المعادلة (E) : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ (5k+3)^2=9+5y$

يعني : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ 25k^2+9+30k=9+5y$

إذن : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ y=5k^2+6k$

و بالتالي : $\mathcal{S}$ مجموعة حلول المعادلة (E) تكتب على الشكل :

$$\mathcal{S}=\{\,(5k+1\,;5k^2+4k-1)\,;(5k+2\,;5k^2+6k)\ /\ k\epsilon\mathbb{Z}\}$$

■ ②

أذَكِّرُ في البداية بمبدأ خوارزمية أقليدس :

$$\begin{array}{c|c} a & \underline{b} \\ c & d \end{array} \implies a\wedge b=b\wedge c$$

لدينا :

$$\begin{array}{r|l} 5k^2+4k-1 & \underline{5k+1} \\ 3k-1 & k \end{array}$$

إذن :

$$(1)\quad \boxed{(5k^2+4k-1)\wedge(5k+1)=(5k+1)\wedge(3k-1)}$$

و لدينا كذلك :

$$\begin{array}{r|l} 5k+1 & \underline{3k-1} \\ 2k+2 & 1 \end{array}$$

إذن :

$$(2)\quad \boxed{(5k+1)\wedge(3k-1)=(3k-1)\wedge(2k+2)}$$

و لدينا كذلك :

$$\begin{array}{r|l} 3k-1 & \underline{2k+2} \\ k-3 & 1 \end{array}$$

إذن :

$$(3)\quad \boxed{(3k-1)\wedge(2k+2)=(2k+2)\wedge(k-3)}$$

و لدينا كذلك :

$$\begin{array}{r|l} 2k+2 & \underline{k-3} \\ 8 & 2 \end{array}$$

إذن :

$$(4)\quad \boxed{(2k+2)\wedge(k-3)=(k-3)\wedge 8}$$

من النتائج (1) و (2) و (3) و (4) نستنتج أن :

$$\boxed{(5k^2+4k-1)\wedge(5k+1)=(k-3)\wedge 8}$$

■ ③

لنحل النظمة التالية :

$$\begin{cases}\overline{121}^{(x)}=\overline{59}^{(y)}\\ x\wedge y=8\\ x\equiv 1[5]\end{cases} \iff \begin{cases}(x+1)^2=9+5y\\ x\wedge y=8\\ x\equiv 1[5]\end{cases}$$

نستنتج من هذه الكتابة الأخيرة أن (x,y) حل للمعادلة (E) و $x\equiv 1[5]$

إذن حسب نتيجة السؤال ب :

$x=5k+1$ و $y=5k^2+4k-1$

بما أن : $x\wedge y=8$ فإن : $(5k^2+4k-1)\wedge(5k+1)=8$

و منه حسب السؤال ② : $(k-3)\wedge 8=8$

إذن : 8 تقسم العدد $(k-3)$.

$$\implies (\exists n\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ k-3=8n$$

$$\implies (\exists n\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ k=8n+3$$

و بالتالي :

$$\begin{cases}x=(5k+1)=40n+16\\ y=5k^2+4k-1=320n^2+272n+56\end{cases}$$

و بالتالي مجموعة حلول النظمة هي :

$$\boxed{\mathcal{S}'=\{\,(40n+16\ \ ;\ \ 320n^2+272n+56)\ /\ n\epsilon\mathbb{Z}\}}$$

التمرين الثاني : (4,5 ن)

■ (I) ①

إذا كان : $2-m>0$ و $10-m>0$

يعني : $m<2$ و $m<10$

فإن :
$$(\mathcal{C}_m)\ :\ \frac{x^2}{\left(\sqrt{10-m}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{2-m}\right)^2}=1$$

و منه : $(\mathcal{C}_m)$ إهليلج.

إذا كان : $2<m<10$

فإن : $10-m>0$ و $m-2>0$

و منه :
$$(\mathcal{C}_m)\ :\ \frac{x^2}{\left(\sqrt{10-m}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\sqrt{m-2}\right)^2}=1$$

إذن : $(\mathcal{C}_m)$ هذلول.

إذا كان : $m>10$ فإن : $m-2>0$ و $10-m<0$

و منه : $(\mathscr{C}_m): -\left(\frac{x^2}{(\sqrt{m-10})^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{m-2})^2}\right)=1$

نلاحظ أن الكمية $\left(\frac{x^2}{(\sqrt{m-10})^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{m-2})^2}\right)$ موجبة إذن : $(\mathscr{C}_m)=\emptyset$

■ (I) ②

في الحالة $m<2$ يعني : $m<10$

لدينا : $(\mathscr{C}_m): \left(\frac{x^2}{(\sqrt{10-m})^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{2-m})^2}\right)=1$

و منه : $(\mathscr{C}_m)$ إهليلج مركزه $O(0,0)$

و رؤوسه : $A(\sqrt{10-m},0)$ و $B(-\sqrt{10-m},0)$

و $A'(0,\sqrt{2-m})$ و $A(0,-\sqrt{2-m})$

نضع : $a=\sqrt{10-m}$ و $b=\sqrt{2-m}$

لدينا : $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{(2-m)-(10-m)}=2\sqrt{2}$

و منه : بؤرتا الإهليلج $(\mathscr{C}_m)$ هما : $F(2\sqrt{2},0)$ و $F'(-2\sqrt{2},0)$

في الحالة : $2<m<10$

لدينا : $(\mathscr{C}_m): \left(\frac{x^2}{(\sqrt{10-m})^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{m-2})^2}\right)=1$

و منه : $(\mathscr{C}_m)$ هذلول مركزه $O(0,0)$

و رأساه هما : $A(\sqrt{10-m},0)$ و $A'(-\sqrt{10-m},0)$

نضع : $a=\sqrt{10-m}$ و $b=\sqrt{m-2}$

لدينا : $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(m-2)+(10-m)}=2\sqrt{2}$

و منه : بؤرتا الهذلول $(\mathscr{C}_m)$ هما : $F(\sqrt{8},0)$ و $F'(-\sqrt{8},0)$

و لدينا كذلك : $(\mathscr{C}_m)$ يقبل مقاربين (Δ) و (Δ') معرفين بما يلي :

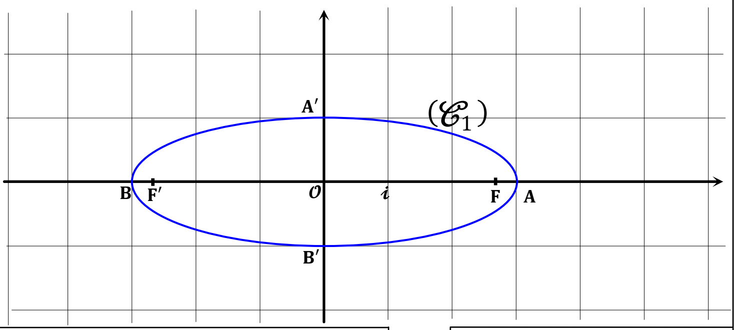
$$\begin{cases}(\Delta): y=\frac{b}{a}x\\ (\Delta'): y=-\frac{b}{a}x\end{cases} \iff \begin{cases}(\Delta): y=\left(\sqrt{\frac{m-2}{10-m}}\right)x\\ (\Delta'): y=-\left(\sqrt{\frac{m-2}{10-m}}\right)x\end{cases}$$

■ (I) ③

لدينا حسب ما سبق $(\mathscr{C}_1)$ إهليلج مركزه $O(0,0)$

و رؤوسه : $A(3,0)$ و $B(-3,0)$ و $A'(0,1)$ و $B'(0,-1)$

و بؤرتاه هما : $F(\sqrt{8},0)$ و $F'(-\sqrt{8},0)$



■ (II) ①

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$(E)\ ;\ z^2-(6cos\alpha)z+(1+8cos^2\alpha)=0$$

لدينا : $\Delta=(6cos\alpha)^2-4(1+8cos^2\alpha)=(2i\,sin\alpha)^2$

و منه (E) تقبل حلين عقديين مترافقين z_1 و z_2 معرفين كما يلي :

$$\begin{cases}z_1=\frac{6\cos\alpha+2i\sin\alpha}{2}=3\cos\alpha+i\sin\alpha\\ z_2=\frac{6\,cos\,\alpha-2i\,sin\,\alpha}{2}=3\,cos\,\alpha-i\,sin\,\alpha\end{cases}$$

■ (II) ② أ

نضع : $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$

نعلم أن : $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ و منه : $\frac{9\cos^2\alpha}{9}+\frac{\sin^2\alpha}{1}=1$

أي : $\frac{(3\cos\alpha)^2}{3^2}+\frac{\sin^2\alpha}{1}=1$

إذن الزوج $(3\cos\alpha\ ;\sin\alpha)$ يحقق معادلة الإهليلج $(\mathscr{C}_1)$

و منه : $M_1\ \epsilon\ (\mathscr{C}_1)$

■ (II) ② ب

لتكن $P(x_0;y_0)$ نقطة من الإهليلج $(\mathscr{C}_1)$

المعادلة الديكارتية لـ (T) مماس الإهليلج $(\mathscr{C}_1)$ في P هي :

$$(T)\ :\ \frac{xx_0}{9}+\frac{yy_0}{1}=1$$

$$\iff\quad (T)\ :\ y=\left(\frac{-x_0}{9y_0}\right)x+1$$

لدينا : M_1 هي صورة z_1 إذن : $M_1(3\cos\alpha\,;\sin\alpha)$

و منه المعادلة الديكارتية المختصرة لـ (OM_1) تكتب على شكل :

$$(OM_1)\ :\ y=\left(\frac{\sin\alpha}{3\cos\alpha}\right)x$$

ننطلق من الكتابة : $(OM_1)\parallel(T)$

هذا يعني أن لهما نفس الميل أي : $\left(\frac{-x_0}{9y_0}\right)=\left(\frac{\sin\alpha}{3\cos\alpha}\right)$

و منه : $(*)\ \boxed{x_0=-3y_0\cdot\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)}$

و بما أن : $P(x_0;y_0)\,\epsilon\,(\mathscr{C}_1)$.

فإن : $\frac{x_0^2}{3^2}+\frac{y_0^2}{1^2}=1$

نعوض x_0 بقيمته حسب $(*)$ في آخر تعبير حصلنا عليه نجد :

$$\frac{1}{9}\left(-3y_0\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2+y_0^2=1$$

$$\Leftrightarrow \quad y_0^2\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \quad y_0^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \quad y_0^2=\cos^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad y_0=\pm\cos\alpha$$

إذا كان $y_0=\cos\alpha$ فإن : $x_0=-3y_0\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=-3\sin\alpha$

إذا كان $y_0=-\cos\alpha$ فإن : $x_0=-3y_0\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=3\sin\alpha$

و بالتالي : توجد نقطتان $\begin{cases}P_1(3\sin\alpha\ ;\ -\cos\alpha)\\P_2(-3\,sin\,\alpha\ ;\ cos\,\alpha)\end{cases}$

من الإهليلج $(\mathscr{C}_1)$: حيث المماس لـ $(\mathscr{C}_1)$ في كل منهما يوازي (OM_1)

■ (II) ② ج

لدينا : $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ و $P_1(3sin\alpha-icos\alpha)$

و $P_2(-3sin\alpha+icos\alpha)$

و منه :

$$\begin{aligned}OM_1^2+OP_1^2&=|z_1|^2+|3sin\alpha-icos\alpha|^2\\&=(9\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(9\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\\&=9(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\\&=\boxed{10}\end{aligned}$$

و بنفس الطريقة لدينا :

$$\begin{aligned}OM_2^2+OP_2^2&=|z_2|^2+|-3sin\alpha+icos\alpha|^2\\&=(9\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(9\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\\&=9(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\\&=\boxed{10}\end{aligned}$$

و بالتالي : $\boxed{OM_1^2+\mathrm{OP}_1^2=\mathrm{OM}_2^2+\mathrm{OP}_2^2}$

التمرين الثالث : (2,5 ن)

■ ①

تذكير : ليكن p احتمال وقوع حدث A في تجربة عشوائية E .

عند إعادة التجربة E n مرة متتالية فإن احتمال الحصول على الحدث A بالضبط k مرة هو : $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

في هذا التمرين : الحدث A هو الحصول على كرة بيضاء.

و لدينا : $p(A)=\frac{10}{n}$

نكرر التجربة n مرة.

إذن احتمال الحصول على الحدث A k مرة هو احتمال الحصول على k كرة بيضاء و يساوي : $p_k=C_n^k\big(p(A)\big)^k\big(1-p(A)\big)^{n-k}$

إذن : $p_k=C_n^k\left(\frac{10}{n}\right)^k\left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-k}$

يمكن ترك هذه النتيجة على ما هي عليه و نكون بذلك قد أجبنا على السؤال باقتصاد تام . و يمكن إضافة بعض المراحل إن كنت من هواة الحساب الحرفي لكي تصل إلى النتيجة التالية :

$$p_k=C_n^k\left(\frac{10}{n-10}\right)^k\left(\frac{n-10}{n}\right)^n$$

■ ② أ

نضع : $u_k=\frac{p_{k+1}}{p_k}$

لدينا :

$$u_k=\frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{C_n^{k+1}\left(\frac{10}{n-10}\right)^{k+1}\left(\frac{n-10}{n}\right)^n}{C_n^k\left(\frac{10}{n-10}\right)^k\left(\frac{n-10}{n}\right)^n}$$

و لدينا :

$$\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k}=\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}\times\frac{k!\,(n-k)!}{n!}=\left(\frac{n-k}{k+1}\right)$$

و منه :

$$u_k=\left(\frac{n-k}{k+1}\right)\times\left(\frac{10}{n-10}\right)$$

■ ② ب

نفترض أن : $u_k\geq 1$

لدينا حسب المعطيات $k\geq 0$

يكفي إذن أن نبرهن على أن : $k\leq 9$

لدينا : $u_k\geq 1$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{n-k}{k+1}\right)\times\left(\frac{10}{n-10}\right)\geq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{10(n-k)}{(n-10)(k+1)}\geq 1$$

بما أن : $n\geq k$ فإن : $n-k\geq 0$

و منه العددان : $10(n-k)$ و $(n-10)(k+1)$ موجبان.

$$\Leftrightarrow\ 10(n-k)\ \geq (n-10)(k+1)$$

$$\Leftrightarrow\ 10n-10k\ \geq nk+n-10k-10$$

$$\Leftrightarrow\ 10n-n+\ 10\geq k(n-10+10)$$

$$\Leftrightarrow\ k\leq\frac{9n+10}{n}$$

$$\Leftrightarrow\ k\leq 9+\frac{10}{n}$$

$$\Leftrightarrow\ k\leq 9$$

و بالتالي : $0\leq k\leq 9$

الشطر الثاني من السؤال :

ننطلق من : $10\leq k\leq (n-1)$

يعني : $\boxed{10\leq 10(n-k)\leq 10(n-10)}$ (1)

و لدينا كذلك : $10\leq k\leq (n-1)$

يعني : $11(n-10)\leq (n-10)(K+1)\leq 10(n-1)$

و منه : $\boxed{\frac{1}{n(n-10)}\leq\frac{1}{(n-10)(k+1)}\leq\frac{1}{11(n-10)}}$ (2)

نضرب التأطيرين (1) و (2) طرفا بطرف نحصل على :

$$\frac{10}{n(n-10)}\leq\frac{10(n-k)}{(n-10)(k+1)}\leq\frac{10(n-10)}{11(n-10)}$$

و منه : $\frac{10(n-k)}{(n-10)(k+1)}\leq\frac{10}{11}$

أي : $\boxed{u_k\leq 1}$

■ ② ج

لدينا من أجل : $0\leq k\leq 9$: $u_k=\frac{p_{k+1}}{p_k}\geq 1$

يعني : $p_{k+1}\geq p_k$

و منه المتتالية $(p_k)_k$ تزايدية .

و لدينا كذلك : من أجل : $10\leq k\leq n-1$: $u_k=\frac{p_{k+1}}{p_k}\leq 1$

يعني : $p_{k+1}\leq p_k$

و منه المتتالية $(p_k)_k$ تناقصية.

نستنتج أن أكبر قيمة لهذه المتتالية هي : p_{10}

إذن : $M=p_{10}=C_n^{10}\left(\frac{10}{n-10}\right)^{10}\left(\frac{n-10}{n}\right)^{n}$

$$\Leftrightarrow\ M=\frac{n!\times 10^{10}\times (n-10)^n}{10!\,(n-10)!\times (n-10)^n\times n^n}$$

$$\Leftrightarrow\ \boxed{M=\frac{n!}{n^n}\times\frac{10^{10}}{10!}\times\frac{(n-10)^n}{(n-10)!}}$$

التمرين الرابع : (10,5 ن)

■ (I) ① أ

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(1+x)e^{-2x}$$

$$=\lim_{\substack{m\to-\infty\\ m=2(x+1)}}\left(\frac{e^2}{2}\times\frac{1}{\left(\frac{e^m}{m}\right)}\right)=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(1+x)e^{-2x}$$

$$=\lim_{\substack{m\to+\infty\\ m=2(x+1)}}\left(\frac{e^2}{2}\times\frac{1}{\left(\frac{e^m}{m}\right)}\right)=\boxed{0}$$

■ (I) ① ب

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ حسب السؤال أ

إذن : $(\mathscr{C})$ يقبل مقاربا أفقيا بجوار $+\infty$ و هو محور الأفاصيل

و لدينا كذلك حسب السؤال أ $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-2x}=0$

و : $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-2x}=+\infty$

إذن : $(\mathscr{C})$يقبل فرعا شلجميا بجوار $-\infty$ اتجاهه محور الأراتيب

■ (I) ②

لدينا : $f(x)=(1+x)e^{-2x}$

إذن f دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها جداء دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}$

و منه : $f'(x)=e^{-2x}-2(1+x)e^{-2x}$

$$\Leftrightarrow\ f'(x)=e^{-2x}-2e^{-2x}-2xe^{-2x}$$
$$\Leftrightarrow\ f'(x)=-e^{-2x}-2xe^{-2x}$$
$$\Leftrightarrow\ f'(x)=-(1+2x)e^{-2x}$$

بما أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ e^{-2x}>0$

فإن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1+2x)$.

لدينا : $f\left(\frac{-1}{2}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)e^{-2\left(\frac{-1}{2}\right)}=\frac{e}{2}$

و لدينا : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

نستنتج إذن جدول تغيرات f كما يلي :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{e}{2}$	$\searrow$	0

■ (I)(3)(أ)

لدينا : $f'(x) = -(1+2x)e^{-2x}$

إذن : $f''(x) = -2e^{-2x} + 2(1+2x)e^{-2x}$

$$\Leftrightarrow \quad f''(x) = -2e^{-2x} + 2e^{-2x} + 4xe^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad f''(x) = 4xe^{-2x}$$

إذا كان : $x = 0$ فإن : $f''(x) = 0$

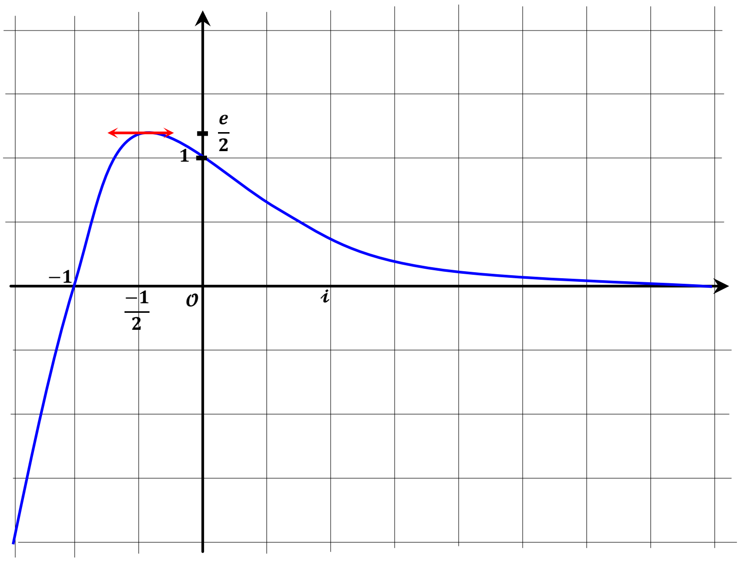
إذا كان : $x > 0$ فإن : $f''(x) > 0$

إذا كان : $x < 0$ فإن : $f''(x) < 0$

نستنتج إذن الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$(\mathscr{C})$	$(\mathscr{C})$ مُقَعَّر	$\Omega(0,1)$ نقطة انعطاف	$(\mathscr{C})$ مُحَدَّب

■ (I)(3)(ب)



■ (I)(4)(أ)

لدينا : $\begin{cases} f(x) = (1+x)e^{-2x} \\ f'(x) = -(1+2x)e^{-2x} \\ f''(x) = 4xe^{-2x} \end{cases}$

إذن : $f''(x) + 3f'(x) + 2f(x)$

$$= 4xe^{-2x} - 3(1+2x)e^{-2x} + 2(1+x)e^{-2x}$$
$$= (4x - 3 - 6x + 2 + 2x)e^{-2x}$$
$$= -e^{-2x}$$

إذن f حل خاص للمعادلة التفاضلية : (E)

$$\boxed{(E) : \quad y'' + 3y' + 2y = -e^{-2x}}$$

■ (I)(4)(ب)

الحل العام للمعادلة (E) يكتب على شكل : $y = y_H + y_p$

بحيث y_p هو حل خاص للمعادلة (E) (نأخذه يساوي f)

و y_H هو حل المعادلة التفاضلية : $(E_H) \ ; \ y'' + 3y' + 2y = 0$

و لحلها نحل أولا معادلتها المميزة : $r^2 + 3r + 2 = 0$

و التي تقبل حلين حقيقيين $r_1 = -1$ و $r_2 = -2$ و ذلك بعد حساب المميز $\Delta = 1$

إذن : $y_H = \alpha e^{-x} + \beta e^{-2x} \quad / \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

و بالتالي : الحل العام للمعادلة التفاضلية (E) يكتب على الشكل :

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x) = \alpha e^{-x} + \beta e^{-2x} + f(x)$$

بحيث : α و β عددين حقيقيين .

■ (II)(1)

يشير التكامل هندسيا إلى قياس طول أو مساحة أو حجم

إذن : $A_n = \int_0^n f(x)\,dx = \int_0^n (1+x)e^{-2x}\,dx$

نضع $u(x) = 1 + x$ و منه : $u'(x) = 1$

ثم نضع $v'(x) = e^{-2x}$ و منه : $v(x) = \frac{-1}{2}e^{-2x}$

باستعمال مكاملة بالأجزاء نحصل على : $A_n = [uv] - \int u'v$

$$\Leftrightarrow \quad A_n = \left[\frac{-(1+x)e^{-2x}}{2}\right]_0^n + \frac{1}{2}\int_0^n e^{-2x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad A_n = \left[\frac{-(1+x)e^{-2x}}{2}\right]_0^n + \frac{1}{2}\left[\frac{-e^{-2x}}{2}\right]_0^n$$

$$\Leftrightarrow \quad A_n = \left(\frac{-(1+n)e^{-2n}}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-e^{-2n}}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad A_n = e^{-2n}\left(\frac{-(1+n)}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad A_n = e^{-2n}\left(\frac{-3-2n}{4}\right) + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad A_n = \frac{-e^{-2n}}{4}(2n+3) + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{A_n = \frac{3 - (2n+3)e^{-2n}}{4}}$$

■ (II) ②

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+3)e^{-2n} = \lim\limits_{\substack{m\to+\infty\\ m=2n+3}} e^3 \times \dfrac{1}{\left(\frac{e^m}{m}\right)} = 0$

و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3-(2n+3)e^{-2n}}{4} = \dfrac{3}{4}$

و بالتالي : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \dfrac{3}{4}}$

■ (III) ①

نضع : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n = n\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^n\,dx$

ثم نضع : $t = nx$ و منه : $dt = ndx$

إذا كان $x = 0$ فإن $t = 0$

إذا كان $x = 1$ فإن $t = n$

و بالتالي : $u_n = n\displaystyle\int_0^n \left[f\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \frac{dt}{n}$

$$\Leftrightarrow \quad u_n = \frac{n}{n}\int_0^n \left(\left(1+\frac{t}{n}\right)e^{\frac{-2t}{n}}\right)^n dt$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n = \int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t}dt$$

■ (III) ② أ

ليكن : $u\ \epsilon\ [1,2]$ يعني : $1 \le u \le 2$

و منه : $1 \le \frac{1}{u} \le \frac{1}{2}$ إذن : $\boxed{\frac{1}{u} \le 1}$ (1)

و نعلم أن : $(\forall\ u\ \epsilon\ [1,2])\ ;\ (u-1)^2 \ge 0$

إذن : $u^2 - 2u + 1 \ge 0$

و منه : $u^2 + 1 \ge 2u$

نضرب الطرفين في العدد الموجب الغير المنعدم $\frac{1}{u}$ نحصل على :

$$\frac{u^2+1}{u} \ge 2$$

و منه : $u + \frac{1}{u} \ge 2$ أي : $\boxed{\frac{1}{u} \ge 2-u}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall u\epsilon[1,2])\ ;\ 2-u \le \frac{1}{u} \le 1$

■ (III) ② ب

ليكن $x\epsilon[0,n]$ و $n\epsilon\mathbb{N}^*$

يعني : $0 \le x \le n$ و منه : $0 \le \frac{x}{n} \le 1$

نضع : $t = \frac{x}{n}$ إذن : $0 \le t \le 1$

أي : $1 \le t+1 \le 2$

إذن حسب السؤال ② أ

$$2-(t+1) \le \frac{1}{t+1} \le 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-t \le \frac{1}{t+1} \le 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \int (1-t)\,dt \le \int \left(\frac{1}{t+1}\right)dt \le \int 1\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad t - \frac{t^2}{2} \le \ln(1+t) \le t$$

نعوض t بالقيمة $\frac{x}{n}$ نحصل على :

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} \le \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \le \frac{x}{n}$$

نضرب أطراف هذا التأطير في العدد الموجب الغير المنعدم n نحصل على :

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x - \frac{x^2}{2n} \le n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \le x}$$

■ (III) ③ أ

ليكن $n\epsilon\mathbb{N}^*$

لدينا حسب السؤال ② ب

$$(\forall x\epsilon[0,n])\ ,(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \le x$$

و منه : $\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le x$

و منه : $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le e^x$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب e^{-2x} نجد :

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \le e^{-x}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,dx \le \int_0^n e^{-x}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u_n \le \int_0^n e^{-x}\,dx} \quad (*)$$

■ (III) ③ ب

ليكن $n\epsilon\mathbb{N}^*$

لدينا حسب السؤال ② ب

$$x - \frac{x^2}{2n} \le n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x - \frac{x^2}{2n} \le \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\left(x-\frac{x^2}{2n}\right)} \le \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\left(x-\frac{x^2}{2n}\right)}e^{-2x} \le \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^n e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}\,dx \le \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\int_0^n e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}\,dx \le u_n} \quad (1)$$

و لدينا : $1 \le n$ إذن : $1 \le n^2$

و منه : $n \le n^3$ إذن : $n^{\frac{1}{3}} \le n$

يعني أن : $$(2)\quad \boxed{\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}\,dx \le \int_0^n e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}\,dx}$$

ليكن : $0 \le x \le n^{\frac{1}{3}}$ إذن : $x^2 \le n^{\frac{2}{3}}$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 \le \frac{2n}{2n^{\frac{1}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2n^{\frac{1}{3}} \le \frac{2n}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-1}{2n^{\frac{1}{3}}} \le \frac{-x^2}{2n}$$

$$\Leftrightarrow \quad -x-\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}} \le -x-\frac{x^2}{2n}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\left(-x-\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} \le e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x-\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)}\,dx \le \int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}\,dx} \quad (3)$$

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن :

$$\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x-\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)}\,dx \le \int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}\,dx \le \int_0^n e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)} \le u_n$$

إذن : $$\boxed{\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x-\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)}\,dx \le u_n} \quad (**)$$

■(III) 3 ج

من $(*)$ و $(**)$ و نستنتج أن :

$$(***)\quad \boxed{\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x-\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)}\,dx \le u_n \le \int_0^n e^{-x}\,dx}$$

و لدينا : $\int_0^n e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^n = -e^{-n}+1$

و $$\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x-\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)}\,dx = e^{\left(\frac{-1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)}\left[-e^{-x}\right]_0^{n^{\frac{1}{3}}}$$

$$= e^{\left(\frac{-1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)}\left(-e^{-n^{\frac{1}{3}}}+1\right)$$

و بالتالي : $$\boxed{\left(1-e^{-n^{\frac{1}{3}}}\right)e^{\left(\frac{-1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} \le u_n \le \left(1-e^{-n}\right)}$$

نحسب نهايتي طرفي هذا التأطير بجوار $+\infty$ نحصل على :

$$\underbrace{\left(1-e^{-n^{\frac{1}{3}}}\right)e^{\left(\frac{-1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} \boxed{1}} \le u_n \le \underbrace{\left(1-e^{-n}\right)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} \boxed{1}}$$

و بالتالي : $(u_n)_n$ متتالية متقاربة و تؤول إلى 1 .

■(III) 4 أ

ليكن : $0<a<1$ و $a \le x \le 1$

لدينا f دالة تناقصية على المجال $[0,+\infty[$.

إذن : $f(1) \le f(x) \le f(a)$

$$\Leftrightarrow \quad 2e^{-2} \le f(x) \le f(a)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < 2e^{-2} \le f(x) \le f(a)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \le n(f(x))^n \le n(f(a))^n$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \le \int_a^1 n(f(x))^n\,dx \le \int_a^1 n(f(a))^n\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{0 \le \int_a^1 n(f(x))^n\,dx \le n(1-a)(f(a))^n} \quad (\#)$$

■(III)(4)(ب)

لدينا : $0 < a < 1$ إذن : $f(1) < f(a) < f(0)$

أي : $2e^{-2} < f(a) < 1$ و منه : $\ln(f(a)) < \ln 1$

يعني : $\ln(f(a)) < 0$

و لدينا :

$$\lim_{n\to+\infty} n(1-a)(f(a))^n = \lim_{n\infty} n(1-a)e^{n\ln(f(a))}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\,ln(f(a))\,e^{n\ln(f(a))}\left(\frac{1-a}{ln(f(a))}\right)$$

$$= \lim_{\substack{m\to-\infty \\ m=n\,ln(f(a))}} (me^m)\left(\frac{1-a}{ln(f(a))}\right)$$

$$= 0\times\left(\frac{1-a}{ln(f(a))}\right) = \boxed{0}$$

إذن حسب التأطير (#)

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{0}_{\substack{n\infty \\ \downarrow \\ \boxed{0}}} \le \int_a^1 n(f(x))^n\,dx \le \underbrace{n(1-a)(f(a))^n}_{\substack{n\infty \\ \downarrow \\ \boxed{0}}}$$

و بالتالي : $$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^1 n(f(x))^n dx\right) = 0}$$

■(III)(4)(ج)

لدينا حسب نتيجة السؤال (3)(ج) $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$

يعني : $$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 n(f(x))^n dx\right) = 1$$

و منه : $$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^a n(f(x))^n dx + \int_a^1 n(f(x))^n dx\right) = 1$$

لدينا حسب نتيجة السؤال (4)(ب) $$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^1 n(f(x))^n dx\right) = 0$$

إذن :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^a n(f(x))^n dx\right) = 1 \quad ; \quad (\forall a\epsilon]0,1[)}$$

■ و الحمد لله رب العالمين ■