استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (2,5 ن)

$x \wedge y$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y .

$\overline{abc}^{(x)}$ هي كتابة العدد abc في نظمة العد ذات الأساس x .

① نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E) \; : \; (x+1)^2 = 9+5y$.

أ) ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E) . — 0,50 ن

بين أن $x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 2[5]$.

ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) . — 0,50 ن

② بين أن : $(5k^2+4k-1) \wedge (5k+1) = (K-3) \wedge 8 \; ; \; (\forall k \epsilon \mathbb{Z})$. — 0,75 ن

③ حل في $\mathbb{N}^2$ النظمة التالية : — 0,75 ن

$$\begin{cases} \overline{121}^{(x)} = \overline{59}^{(y)} \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1[5] \end{cases}$$

التمرين الثاني : (4,5 ن)

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر المنحنى $(\mathscr{C}_m)$ الذي معادلته هي :

$$\boxed{\frac{x^2}{(10-m)} + \frac{y^2}{(2-m)} = 1 \quad ; \quad m \epsilon \mathbb{R} \setminus \{2;10\}}$$

(I) ① ناقش حسب قيم m طبيعة المنحنى $(\mathscr{C}_m)$. — 1,00 ن

② إذا كان $(\mathscr{C}_m)$ مخروطيا ، اعط عناصره المميزة (المركز و الرؤوس و البؤرتان و المقاربان إن وجدا) — 1,00 ن

③ أرسم $(\mathscr{C}_1)$. — 0,25 ن

(II) نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(E) \; : \; z^2 - (6\cos\alpha)z + 1 + 8\cos^2\alpha = 0 \qquad \text{حيث :} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

① حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) . — 0,50 ن

ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) ; $(\mathfrak{Im}(z_1) > 0)$ و M_1 و M_2 النقطتان ذات اللحقين z_1 و z_2 على التوالي.

② أ) تحقق أن : $M_1 \epsilon (\mathscr{C}_1)$. — 0,25 ن

ب) بين أنه توجد نقطتان P_1 و P_2 من $(\mathscr{C}_1)$ حيث يكون فيهما المماس للمنحنى $(\mathscr{C}_1)$ موازيا للمستقيم (OM_1) . — 0,75 ن

ج) تحقق أن : ${OM_1}^2 + {OP_1}^2 = {OM_2}^2 + {OP_2}^2$. — 0,75 ن

التمرين الثالث : (2,5 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 20 .

يحتوي كيس على 10 كرات بيضاء و $(n-10)$ كرة سوداء ، نفترض أن كل الكرات غير قابلة للتمييز باللمس

نسحب كرة من الكيس و نسجل لونها ثم نعيدها إلى الكيس . نكرر هذه التجربة n مرة. نسمي p_k احتمال الحصول على k كرة بيضاء $(0 \leq k \leq n)$.

0,50 ن ① أحسب p_k بدلالة n و k .

② نضع : $u_k = \dfrac{p_{k+1}}{p_k}$ حيث : $k \epsilon \{0,1, \dots, (n-1)\}$.

0,50 ن (أ) بين أن : $u_k = \dfrac{(n-k)}{(k+1)} \times \dfrac{10}{(n-10)}$

0,50 ن (ب) بين أن : $\boxed{0 \leq k \leq 9 \iff u_k \geq 1}$ و $\boxed{10 \leq k \leq n-1 \iff u_k \leq 1}$

1,00 ن (ج) استنتج أكبر قيمة M للعدد p_k عندما يتغير k في $\{0,1, \dots, n\}$.

و بين أن : $M = \dfrac{n!}{n^n} \times \dfrac{10^{10}}{10!} \times \dfrac{(n-10)^{n-10}}{(n-10)!}$

التمرين الرابع : (10,5 ن)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\boxed{f(x) = (1+x)e^{-2x}}$.

ليكن $(\mathscr{C})$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

0,50 ن (I) ① (أ) أحسب : $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

0,50 ن (ب) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C})$.

0,50 ن ② أدرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

0,50 ن ③ (أ) أدرس تقعر المنحنى $(\mathscr{C})$.

0,50 ن (ب) أنشىء $(\mathscr{C})$.

0,50 ن ④ (أ) بين أن f حل للمعادلة التفاضلية $(E) : y'' + 3y' + 2y = -e^{-2x}$.

0,50 ن (ب) حدد الحل العام للمعادلة (E) .

	(II) ليكن $n\epsilon\mathbb{N}^*$ نرمز بـ A_n لمساحة الحيز المحصور بين $(\mathscr{C})$ و محور الأفاصيل و محور الأراتيب و المستقيم ذي المعادلة $x = n$.
1,00 ن	① أحسب A_n بدلالة n .
0,50 ن	② أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$
	(III) لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم نضع : $\boxed{u_n = \int_0^n [f(x)]^n\,dx}$
0,75 ن	① باستعمال تقنية تغيير المتغير $(xn = t)$ بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) \ ; \ u_n = \int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t} dt$
0,50 ن	② ⓐ بين أن : $(\forall r\epsilon[1;2]) \ ; \ 2 - r \leq \frac{1}{r} \leq 1$
0,75 ن	ⓑ استنتج : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) , (\forall x\epsilon[0;n]) \ ; \ x - \frac{x^2}{2n} \leq n\,ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \leq x$
0,50 ن	③ ⓐ بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) \ ; \ u_n \leq \int_0^n e^{-x}\,dx$
0,75 ن	ⓑ بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) \ ; \ e^{\frac{-1}{2\sqrt{n}}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x}\,dx \leq u_n$
0,75 ن	ⓒ استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة و حدد نهايتها.
	④ ليكن a عنصرا من المجال $]0,1[$.
0,50 ن	ⓐ بين أن : $\int_a^1 n\,[f(x)]^n dx \leq n(1-a)[f(a)]^n$
0,50 ن	ⓑ استنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^1 n\,[f(x)]^n dx = 0$
0,50 ن	ⓒ أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n n\,[f(x)]^n dx$