مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 10
مدة الإنجاز : أربع ساعات

الإمتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة العادية 2005

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (4,5 ن)

نعتبر في $\mathbb{R}^2$ قانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي :

$$(\forall (a,b)\epsilon\mathbb{R}^2)\ ,\qquad (\forall (x,y)\epsilon\mathbb{R}^2)\ :\ (a,b)*(x,y)=\left(\frac{ax+by}{2},\frac{ay+bx}{2}\right)$$

لتكن المجموعة : $E=\left\{\left(m+\frac{1}{m}\ ;\ m-\frac{1}{m}\right)\epsilon\mathbb{R}^2/\ m\epsilon\mathbb{R}^*\right\}$

0,75 ن ① بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في E .

② ليكن φ التطبيق المعرف على $\mathbb{R}^*$ نحو E بما يلي : $(\forall m\epsilon\mathbb{R}^*)\ ;\ \varphi(m)=\left(m+\frac{1}{m}\ ;m-\frac{1}{m}\right)$

0,50 ن (أ) بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,*)$.

0,75 ن (ب) استنتج أن $(E,*)$ زمرة تبادلية محددا عنصر ها المحايد .

و مماثل كل عنصر $\left(m+\frac{1}{m}\ ;m-\frac{1}{m}\right)$ حيث m عدد حقيقي غير منعدم .

نعتبر المجموعة . $F=\{(x\ ,y)\epsilon\mathbb{R}^2\ ;\ x\geq 2\ \text{ و }\ y^2=x^2-4\}$

1,00 ن (أ) بين أن : $F=\left\{\left(m+\frac{1}{m}\ ;\ m-\frac{1}{m}\right)\ \epsilon\ \mathbb{R}^2/\ m>0\ \right\}$

1,00 ن (ب) بين أن : $(F,*)$ زمرة جزئية من $(E,*)$.

التمرين الثاني : (3,0 ن)

(I) p عدد صحيح طبيعي أولي أكبر أو يساوي 5

0,50 ن ① بين أن : $p^2\equiv 1[3]$.

0,50 ن ② (أ) باستعمال زوجية العدد p بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي q بحيث : $p^2-1=4q(q+1)$.

0,50 ن (ب) استنتج أن : $p^2\equiv 1[8]$.

0,50 ن ③ بين أن : $p^2\equiv 1[24]$.

(II) ليكن a عددا صحيحا طبيعيا أوليا مع العدد 24

0,50 ن ① بين أن : $a^2\equiv 1[24]$.

0,50 ن ② هل توجد أعداد صحيحة طبيعية $a_1\ ,a_2\ ,\cdots,a_{23}$ حيث :

$$\forall k\epsilon\{1,2,\ldots,23\}\ ;\ a_k\wedge 24=1 \qquad \text{و} \qquad {a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_{23}}^2=23997$$

التمرين الثالث : (8,5 ن)

(I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = (x+2)e^{\frac{-2}{x}} & ; \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

ليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ، (الوحدة $2cm$)

0,25 ن ① (أ) بين أن f متصلة على اليمين في 0 .

0,25 ن (ب) بين أن f قابلة للإشتقاق على اليمين في 0 .

0,50 ن (ج) بين أن f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$.

0,25 ن ② (أ) أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0,50 ن (ب) بين أن : $(\forall t \geq 0 \ ) \ ; \ 0 \leq e^{-t} + t - 1 \leq \dfrac{t^2}{2}$

0,50 ن (ج) بين أن : $(\forall x > 0 \ ); \ \dfrac{-4}{x} \leq f(x) - x \leq \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{2}{x}$

0,25 ن (د) استنتج أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مقاربا مائلا (Δ) ينبغي تحديد معادلته .

0,50 ن ③ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم (Δ) .

(II) n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f_n(x) = \left(x + \dfrac{2}{n}\right) e^{\frac{-2}{x}} & ; \quad x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

0,25 ن ① بين أن f_n قابلة للإشتقاق على اليمين في 0.

0,50 ن ② أدرس تغيرات الدالة f_n على المجال $[0,+\infty[$.

0,50 ن ③ (أ) بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، المعادلة : $f_n(x) = \dfrac{2}{n}$ تقبل حلا وحيدا a_n في المجال $]0,+\infty]$.

0,50 ن (ب) بين أن : $(\forall x > 0), (\forall n \epsilon \mathbb{N}^*) \ ; \ f_{n+1}(x) - \dfrac{2}{n+1} > f_n(x) - \dfrac{2}{n}$

0,75 ن (ج) استنتج أن المتتالية (a_n) تناقصية ثم بين أن (a_n) متقاربة .

نضع : $a = \lim\limits_{\infty} a_n$

0,50 ن (د) بين أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*) \ ; \ na_n = 2e^{\frac{2}{a_n}} - 2$

0,50 ن (هـ) بين أن : $a = 0$.

(III) نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $F(x)=\int_x^{2x} f(t)dt$

(بحيث f هي الدالة المعرفة في الجزء الأول)

0,25 ن | ① (أ) بين أن : $xf(x)\leq F(x)\leq xf(2x)$; $(\forall x>0)$.

0,25 ن | (ب) أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

0,50 ن | ② (أ) بين أن F قابلة للإشتقاق على المجال : $[0,+\infty[$.

0,75 ن | (ب) بين أن : $\begin{cases} F'(x)=e^{\frac{-2}{x}}\left((x+2)\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)+(3x+2)e^{\frac{1}{x}}\right) & ; \; x>0 \\ F'_d(0)=0 \end{cases}$

($F'_d(0)$ هو العدد المشتق للدالة F على اليمين في 0)

0,50 ن | ③ إعط جدول تغيرات الدالة F .

<u>التمرين الرابع : (4,5 ن)</u>

لكل عدد عقدي z مخالف للعدد -1 نضع : $f(z)=\dfrac{iz-1}{(z+1)^2}$

0,25 ن | ① (أ) حدد العدد الحقيقي y بحيث : $f(iy)=iy$.

1,00 ن | (ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E): f(z)=z$.

نرمزبـ z_0 و z_1 و z_2 لحلول المعادلة (E) حيث : $\begin{cases}\Re e(z_1)>Re(z_2)\\ \Re e(z_0)=0\end{cases}$

0,50 ن | ② (أ) تحقق أن : $z_1+1=e^{i\frac{11\pi}{6}}$ و $z_2+1=e^{i\frac{7\pi}{6}}$

0,75 ن | (ب) استنتج الكتابة المثلثية لكل من z_1 و z_2

③ في هذا السؤال نفترض أن : $z=e^{i\alpha}$ حيث $0\leq\alpha<\pi$

0,50 ن | (أ) بين أن : $\overline{f(z)}=izf(z)$.

0,25 ن | (ب) حدد α إذا علمت أن : $f(z)+\overline{f(z)}=0$.

0,75 ن | (ج) أكتب $f(z)$ على الشكل $f(z)=re^{i\varphi}$ حيث : $(r,\varphi)\epsilon\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$.

0,50 ن | ④ حدد z إذا علمت أن : $|z|=1$ و $\Re e\big(f(z)\big)=\frac{1}{2}$.

التمرين الأول : (4,0 ن)

■ ①

ليكن m و n عنصرين من $\mathbb{R}^*$

ليكن : $\left(m+\frac{1}{m}\ ;\ m-\frac{1}{m}\right)$ و $\left(n+\frac{1}{n}\ ;\ n-\frac{1}{n}\right)$ عنصرين من E

لدينا : $\left(m+\frac{1}{m}\ ;\ m-\frac{1}{m}\right)*\left(n+\frac{1}{n}\ ;\ n-\frac{1}{n}\right)$

$=\left(mn+\frac{1}{mn}\ ;\ mn-\frac{1}{mn}\right)$

بما أن : $0 \neq n$ و $0 \neq m$ فإن : $mn \neq 0$

و منه : $\left(mn+\frac{1}{mn}\ ;\ mn-\frac{1}{mn}\right)\epsilon\, E$

و بالتالي : $*$ قانون تركيب داخلي في E .

■ ② أ

ليكن $\varphi(m)$ و $\varphi(n)$ عنصرين من E

لدينا حسب السؤال ① : $\varphi(m)*\varphi(n)=\varphi(mn)$

إذن φ تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,*)$

ليكن A عنصرا من E . إذن حسب تعريف المجموعة E :

$(\exists!\, m\epsilon\mathbb{R}^*)\ ;\ \varphi(m)=A$

و منه : φ تقابل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,*)$

و بالتالي φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,*)$

■ ② ب

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على بنية الزمرة .

لدينا $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد 1 و كل عنصر a يقبل مماثلا $\frac{1}{a}$ بالقانون $\times$.

و بما أن φ تشاكل تقابلي فإن :

$(E,*)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو $\varphi(1)$ و كل عنصر $\varphi(m)$ يقبل مماثلا $\varphi\left(\frac{1}{m}\right)$ بالقانون $*$.

و لدينا : $\varphi(1)=(2,0)$

و $\varphi\left(\frac{1}{m}\right)=\left(m+\frac{1}{m}\ ;\ -m+\frac{1}{m}\right)$

■ ③ أ

ليكن (x,y) عنصرا من F

إذن : $\begin{cases} x\geq 2 \\ y^2=x^2-4 \end{cases}$

نطرح السؤال : هل يوجد عدد حقيقي موجب m بحيث : $m+\frac{1}{m}=x$

و للإجابة على هذا السؤال نبين أن المعادلة

$m+\frac{1}{m}=x$ تقبل على الأقل حلا موجبا m

لدينا : $m+\frac{1}{m}=x$

$\Leftrightarrow\quad m^2-mx+1=0$

لدينا : $\Delta=x^2-4=(x-2)(x+2)$

بما أن : $x\geq 2$ فإن : $\Delta>0$

و منه المعادلة تقبل حلين مختلفين m_1 و m_2

$m_1=\frac{1+\sqrt{\Delta}}{2}$ و $m_2=\frac{1-\sqrt{\Delta}}{2}$

الحل m_1 عدد حقيقي موجب قطعا إذن فإشارة الحل الثاني m_2 لا تهمنا علما أنه تم إيجاد حل موجب للمعادلة

نستنتج إذن أن :

$(\forall x\geq 0),(\exists m>0)\ ;\ x=m+\frac{1}{m}$

و لدينا : $y^2=x^2-4$

إذن : $y=\pm\sqrt{x^2-4}$

$=\pm\sqrt{m^2+\frac{1}{m^2}+2-4}=\pm\sqrt{\left(m-\frac{1}{m}\right)^2}=\pm\left(m-\frac{1}{m}\right)$

نختار : $y=\left(m-\frac{1}{m}\right)$

إذن : $(x,y)=\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)\epsilon\,\mathbb{R}^2\ \ /\ \ m>0$

عكسيا : ننطلق من : $\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)\epsilon\,\mathbb{R}^2\ \ /\ \ m>0$

لنبرهن أن المتراجحة $m+\frac{1}{m}\geq 2$

تقبل حلولا من أجل $m>0$.

المتراجحة تكافئ : $\frac{m^2+1}{m}\geq 2$

نضرب طرفي المتراجحة في العدد الموجب m نحصل على :

$$m^2 + 1 \geq 2m$$

يعني : $m^2 - 2m + 1 \geq 0$ أي : $(m-1)^2 \geq 0$

و هذه العبارة صحيحة كيفما كان العدد الحقيقي m .

و بالأخص من أجل $m > 0$

خلاصة :

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 2 \text{ و } y^2 = x^2 - 4\}$$
$$= \left\{\left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m}\right) \in \mathbb{R}^2 \ / \ m > 0\right\}$$

■ ③ ب

من بين عناصر المجموعة F نجد الزوج $(2,0)$. إذن : $F \neq \emptyset$

و من الصيغة الثانية للمجموعة F نستنتج أن : $F \subset E$

لأن : $m > 0 \implies m \in \mathbb{R}^*$

و بالتالي : F جزء غير فارغ من E (1)

ليكن X_m و X_n عنصرين من F بحيث :

$$\begin{cases} X_m = \left(m + \frac{1}{m} ; m - \frac{1}{m}\right) \ ; \ m > 0 \\ X_n = \left(n + \frac{1}{n} ; n - \frac{1}{n}\right) \ ; \ n > 0 \end{cases}$$

لدينا :

$$X_m * (X_n)' = \left(m + \frac{1}{m} ; m - \frac{1}{m}\right) * \left(n + \frac{1}{n} ; -n + \frac{1}{n}\right)$$
$$= \left(\frac{m}{n} + \frac{1}{\frac{m}{n}} ; \frac{m}{n} - \frac{1}{\frac{m}{n}}\right) = X_{\left(\frac{m}{n}\right)}$$

بما أن : $m > 0$ و $n > 0$ فإن : $\frac{m}{n} > 0$ و منه $X_{\left(\frac{m}{n}\right)} \in F$

أي : $(X_m) * (X_n)' \in F$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $(F,*)$ زمرة جزئية من $(E,*)$.

التمرين الثاني : (3,0 ن)

■ (I) ①

لدينا p و 3 عددان أوليان .

إذن $3 \wedge p = 1$ و منه 3 لا تقسم p

و بالتالي حسب مبرهنة $(Fermat)$: $p^{3-1} \equiv 1[3]$

■ (I) ② أ

نعلم أن العدد الأولي الزوجي الوحيد هو 2

و بما أن p عدد أولي و أكبر من 5 فإنه بالضرورة p سيكون عددا فرديا.

إذن : $(\exists q \in \mathbb{N}) \ ; \ p = 2q + 1$

يعني : $(\exists q \in \mathbb{N}) \ ; \ p^2 = (2q+1)^2$

يعني : $(\exists q \in \mathbb{N}) \ ; \ p^2 = 4q^2 + 4q + 1$

يعني : $(\exists q \in \mathbb{N}) \ ; \ p^2 - 1 = 4q(q+1)$

■ (I) ② ب

لدينا : $(\exists q \in \mathbb{N}) \ ; \ p^2 - 1 = 4q(q+1)$

و لدينا q و $(q+1)$ عددان صحيحان طبيعيان متتابعان .

إذن أحدهما فردي و الآخر زوجي .

و منه الجداء $q(q+1)$ عدد زوجي دائما .

يعني : $(\exists m \in \mathbb{N}) \ ; \ q(q+1) = 2m$

إذن : $(\exists m \in \mathbb{N}) \ ; \ p^2 - 1 = 4(2m)$

أي : $(\exists m \in \mathbb{N}) \ ; \ p^2 - 1 = 8m$

و منه : $8 \ / \ (p^2 - 1)$ أي : $\boxed{p^2 \equiv 1[8]}$

■ (I) ③

في البداية وجب التذكير بالخاصية التالية :

إذا كان : p_1 و p_2 و ... و p_k أعداد أولية و كانت n_1 و n_2 و ... و n_k أعدادا صحيحة طبيعية بحيث : $(\forall i) \ ; \ (p_i)^{n_i} \ / \ a$

فإن : $\left(\prod_{i=1}^{k} {p_i}^{n_i}\right) / \ a$

لدينا : $24 = 2^3 \times 3^1$

و لدينا كذلك حسب نتائج الأسئلة السابقة : $8/(p^2 - 1)$ و $3/(p^2 - 1)$

يعني : $2^3/(p^2 - 1)$ و $3^1/(p^2 - 1)$

و نعلم أن 3 و 2 عددان أوليان

إذن حسب الخاصية أعلاه : $2^3 \times 3^1/(p^2 - 1)$

يعني : $24/(p^2 - 1)$

و بالتالي : $p^2 \equiv 1[24]$

و أشير إلى أنه يوجد شكل آخر للخاصية المذكورة و هو كالتالي :

$$\begin{cases} m/a \\ n/a \\ m\wedge n=1 \end{cases} \Rightarrow \quad mn/a$$

■ (II) ①

لدينا a عدد صحيح طبيعي بحيث : $a\wedge 24=1$

نفصل بين حالتين :

<u>الحالة الأولى : إذا كان a عددا أوليا.</u>

لدينا : $2\wedge 24\neq 1$ و $3\wedge 24\neq 1$ و $5\wedge 24\neq 1$

إذن : a عدد أولي أكبر من 5

و منه حسب نتائج الفقرة(I): $a^2\equiv 1[24]$

<u>الحالة الثانية : إذا كان a غير أولي</u>

ليكن $(p_1{}^{n_1}p_2{}^{n_2}\cdots p_k{}^{n_k})$ تفكيك العدد a إلى جداء عوامل أولية

بما أن $a\wedge 24=1$ أي : $a\wedge(2^3 3^1)=1$

فإن : جميع الأعداد الأولية p_1 و p_2 و ... و p_k تخالف 2 و تخالف 3

و منه : $(\forall i\epsilon[\![1,k]\!])\ ;\ p_i\geq 5$

إذن يمكننا استعمال نتائج الفقرة الأولى من التمرين.

لدينا : $p_1^2\equiv 1[24]$ إذن : $(p_1^2)^{n_1}\equiv 1[24]$

و لدينا : $p_2^2\equiv 1[24]$ إذن : $(p_2^2)^{n_2}\equiv 1[24]$

و لدينا : $p_3^2\equiv 1[24]$ إذن : $(p_3^2)^{n_3}\equiv 1[24]$

⋮ ⋮

و لدينا : $p_k^2\equiv 1[24]$ إذن : $\left(p_k^2\right)^{n_k}\equiv 1[24]$

عند المرور إلى الجداء نحصل على : $p_1^{2n_1}p_2^{2n_2}p_3^{2n_3}\cdots p_k^{2n_k}\equiv 1[24]$

و منه : $\left(p_1^{n_1}p_2^{n_2}p_3^{n_3}\cdots p_k^{n_k}\right)^2\equiv 1[24]$

و بالتالي : $\boxed{a^2\equiv 1[24]}$

■ (II) ②

سوف نستعمل البرهان بالخلف.

نفترض وجود الأعداد a_1 و a_2 و.... و a_{23}

بحيث : $(\forall k\epsilon[\![1,23]\!])\ ;\ a_k\wedge 24=1$ و $a_1^2+\cdots+a_{23}^2=23997$

لدينا كل عدد a_k أولي مع 24

إذن حسب السؤال (II) ①

$$\begin{cases} a_1^2\equiv 1[24] \\ a_2^2\equiv 1[24] \\ \vdots \\ a_{23}^2\equiv 1[24] \end{cases}$$

عند المرور إلى الجمع بين هذه المتفاوتات نحصل على :

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{23}^2\equiv 23[24]$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{23997\equiv 23[24]}\ (1)$$

نستعين بالآلة الحاسبة لنحصل على : $\boxed{23997\equiv 21[24]}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $23\equiv 21[24]$

يعني : $2\ /\ 24$ و هذا مستحيل بطبيعة الحال

و بالتالي : لا وجود لأعداد a_1 و a_2 و ⋯ و a_{23} أولية مع 24

و تحقق : $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{23}^2=23997$

التمرين الثالث : (8,5 ن)

■ (I) ① أ

لدينا :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+2)e^{\frac{-2}{x}}=2\times e^{-\infty}=0=f(0)$$

إذن f متصلة على اليمين في الصفر .

■ (I) ① ب

لدينا : $$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x+2)e^{\frac{-2}{x}}}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{2}{x}\right)e^{\frac{-2}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{-2}{x}}-\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-2}{x}\right)e^{\frac{-2}{x}}$$

$$=0-\lim_{\substack{u\to-\infty \\ u=\frac{-2}{x}}} ue^u$$

$$=0-0=0=f_d'(0)$$

■ (I)(1)(ج)

ليكن x عنصرا من $[0,+\infty[$

لدينا : $f(x)=(x+2)e^{\frac{-2}{x}}$

إذن : $f'(x)=e^{\frac{-2}{x}}+\left(\frac{-2}{x}\right)'(x+2)e^{\frac{-2}{x}}$

$$\Leftrightarrow\quad f'(x)=e^{\frac{-2}{x}}+\frac{2}{x^2}(x+2)e^{\frac{-2}{x}}$$

$$\Leftrightarrow\quad f'(x)=\left(\frac{2x+4+x^2}{x^2}\right)e^{\frac{-2}{x}}$$

$$\Leftrightarrow\quad f'(x)=\left(\frac{x^2+2x+1+3}{x^2}\right)e^{\frac{-2}{x}}$$

$$\Leftrightarrow\quad f'(x)=\left(\frac{(x+1)^2+3}{x^2}\right)e^{\frac{-2}{x}}>0$$

إذن f دالة تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$.

■ (I)(2)(أ)

$$\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{(x+2)}_{+\infty}\,\underbrace{e^{\frac{-2}{x}}}_{1}=+\infty$$

■ (I)(2)(ب)

ليكن t عددا حقيقيا موجبا

نضع : $\begin{cases}\varphi(t)=1-t\\ \psi(t)=1-t+\dfrac{t^2}{2}\\ h(t)=e^{-t}\end{cases}$

إذن : $\begin{cases}\varphi'(t)=-1\\ \psi'(t)=t-1\\ h'(t)=-e^{-t}\end{cases}$

لدينا : $t\geq 0$ إذن : $-t\leq 0$

و منه : $-e^{-t}\leq -1$ يعني : $h'(t)\leq\varphi'(t)$

و بما أن : $h(0)=\varphi(0)=1$

فإن : $\forall\, t\in[0,+\infty[\ ;\ h(t)\leq\varphi(t)$

يعني : $\boxed{\forall\, t\in[0,+\infty[\ ;\ e^{-t}\leq 1-t}$ (1)

من النتيجة (1) نستنتج أن : $-e^{-t}\geq t-1$

إذن : $h'(t)\geq\psi'(t)$

و بما أن : $h(0)=\psi(0)=1$

فإن : $h(t)\geq\psi(t)$

يعني : $\boxed{\forall\, t\in[0,+\infty[\ ;\ e^{-t}\geq 1-t+\frac{t^2}{2}}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\forall\, t\in[0,+\infty[\ ;\ 1-t\leq e^{-t}\leq 1-t+\frac{t^2}{2}$$

و بالتالي : $\boxed{\forall\, t\in[0,+\infty[\ ;\ 0\leq e^{-t}+t-1\leq\frac{t^2}{2}}$

■ (I)(2)(ج)

ليكن $x>0$ إذن $\frac{2}{x}>0$

و منه حسب السؤال (2)(ب) $0\leq e^{\frac{-2}{x}}+\frac{2}{x}-1\leq\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^2$

و منه : $\left(1-\frac{2}{x}\right)\leq e^{\frac{-2}{x}}\leq\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)$

نضرب طرفي هذا التأطير في العدد الموجب $(x+2)$ نحصل على :

$$(x+2)\left(1-\frac{2}{x}\right)\leq(x+2)e^{\frac{-2}{x}}\leq(x+2)\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)$$

بعد النشر و التبسيط نحصل على : $\left(x-\frac{4}{x}\right)\leq f(x)\leq\left(x-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)$

إذن : $(\forall x>0)\ ;\ \frac{-4}{x}\leq f(x)-x\leq\frac{-2}{x}+\frac{4}{x^2}$

■ (I)(2)(د)

لدينا : $(\forall x>0)\ ;\ \frac{-4}{x}\leq f(x)-x\leq\frac{-2}{x}+\frac{4}{x^2}$

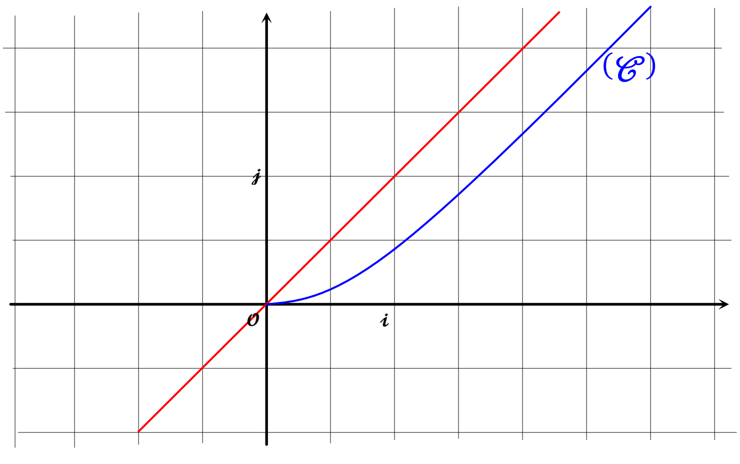
بما أن : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-4}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}\right)=0$

فإن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=0}$ (1)

و لدينا حسب السؤال (2)(أ) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\mathscr{C})$ يقبل مقاربا مائلا بجوار $+\infty$ معادلته $y=x$

■ (I)(3)



■(II)①هـ

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(x+\frac{2}{n}\right)e^{\frac{-2}{x}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(1+\frac{2}{nx}\right)e^{\frac{-2}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{-2}{x}}+\lim_{x\to0^+}\frac{1}{n}\frac{1}{\left(\frac{e^{\frac{2}{x}}}{\frac{2}{x}}\right)}$$

$$=0+\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{+\infty}\right)=0$$

إذن f_n قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر.و لدينا : $(f_n)'_d(0)=0$

■(II)②

ليكن x عنصرا من $]0,+\infty[$.

لدينا : $f_n(x)=\left(x+\frac{2}{n}\right)e^{\frac{-2}{x}}$

و منه : $f_n'(x)=\left(e^{\frac{-2}{x}}\right)+\left(\frac{-2}{x}\right)'\left(x+\frac{2}{n}\right)e^{\frac{-2}{x}}$

$$=\left(e^{\frac{-2}{x}}\right)+\frac{2}{x^2}\left(x+\frac{2}{n}\right)e^{\frac{-2}{x}}$$

$$=\left(1+\frac{2}{x^2}\left(x+\frac{2}{n}\right)\right)e^{\frac{-2}{x}}>0$$

إذن f_n دالة تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$.

■(II)③(أ)

لدينا f_n دالة متصلة و تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$.

إذن f_n تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو المجال $f_n(]0,+\infty[)$

و لدينا : $f_n(]0;+\infty[)=\left]\lim_{x\to0^+}f_n(x);\lim_{x\to+\infty}f_n(x)\right[=]0;+\infty[$

نضع : $\varphi_n(x)=f_n(x)-\frac{2}{n}$

لدينا : φ دالة متصلة و تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

لأن $\varphi_n'(x)=f_n'(x)>0$

إذن φ_n تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو المجال

$$\left]\varphi_n(0);\lim_{x\to+\infty}\varphi_n(x)\right[=]0;+\infty[$$

و من هذا التقابل نستنتج وجود عدد وحيد a_n من المجال $]0,+\infty[$

بحيث : $\varphi_n(a_n)=0$

يعني : $f_n(a_n)=\frac{2}{n}$

■(II)③ب

$$\left(f_{n+1}(x)-\frac{2}{n+1}\right)-\left(f_n(x)-\frac{2}{n}\right)$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}+e^{\frac{-2}{x}}\left(\frac{-2}{n(n+1)}\right)$$

$$=\frac{-2}{n(n+1)}\left(e^{\frac{-2}{x}}-1\right)$$

و لدينا $x>0$ إذن $\frac{-2}{x}<0$

و منه : $e^{\frac{-2}{x}}<1$ يعني : $e^{\frac{-2}{x}}-1<0$

و بالتالي : $\frac{-2}{n(n+1)}\left(e^{\frac{-2}{x}}-1\right)>0$

و منه :

$$(\forall x>0),(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ f_{n+1}(x)-\frac{2}{n+1}>f_n(x)-\frac{2}{n}$$

■(II)③ج

لدينا : $f_{n+1}(x)-\frac{2}{n+1}>f_n(x)-\frac{2}{n}$

$$\Leftrightarrow\ \lim_{x\to+\infty}\left(f_{n+1}(x)-\frac{2}{n+1}\right)>\lim_{x\to+\infty}\left(f_n(x)-\frac{2}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ 0-f_n(a_{n+1})>0-f_n(a_n)$$

$$\Leftrightarrow\ f_n(a_{n+1})<f_n(a_n)$$

و بما أن f دالة تزايدية قطعا فإن : $a_{n+1}<a_n$

و منه المتتالية $(a_n)_n$ تناقصية . و بما أنها مصغورة بالعدد 0 فإنها متقاربة.

■(II)③د

لدينا : $f_n(a_n)=\frac{2}{n}$

يعني : $\left(a_n+\frac{2}{n}\right)e^{\frac{-2}{a_n}}=\frac{2}{n}$

يعني : $\frac{\left(a_n+\frac{2}{n}\right)}{e^{\frac{2}{a_n}}}=\frac{2}{n}$

و منه : $2e^{\frac{2}{a_n}}=n\left(a_n+\frac{2}{n}\right)$

أي : $2e^{\frac{2}{a_n}}=na_n+2$

و منه : $\boxed{2e^{\frac{2}{a_n}}-2=na_n}$

■ (II) ③

نفترض أن : $a \neq 0$

لدينا : $2e^{\frac{2}{a_n}} - 2 = na_n$

و لدينا : $\lim\limits_{n\infty} na_n = (+\infty) \times a = +\infty$

و $\lim\limits_{n\infty}\left(2e^{\frac{2}{a_n}} - 2\right) = 2e^{\frac{2}{a}} - 2$

إذن : $2e^{\frac{2}{a}} - 2 = +\infty$

و هذا تناقض إذن : $a = 0$

■ (III) ① أ

ليكن x عددا حقيقيا موجبا بحيث : $x < 2x$

و ليكن t عددا حقيقيا بحيث : $x \leq t \leq 2x$

بما أن f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$

فإن : $f(x) \leq f(t) \leq f(2x)$

و بما أن f متصلة على المجال $[0,+\infty[$.

فإن : $\int_x^{2x} f(x)\,dt \leq \int_x^{2x} f(t)\,dt \leq \int_x^{2x} f(2x)\,dt$

يعني : $f(x)[t]_x^{2x} \leq F(x) \leq f(2x)[t]_x^{2x}$

أي : $\boxed{xf(x) \leq F(x) \leq xf(2x)}$

■ (III) ① ب

لدينا : $F(x) \geq xf(x)$

و نعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = +\infty$

و منه : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

■ (III) ② أ

ليكن x عنصرا من $[0,+\infty[$

لدينا f دالة متصلة على $[0,+\infty[$

إذن f تقبل دالة أصلية ψ بحيث : $\psi'(x) = f(x)$

لدينا :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt = \int_x^0 f(t)\,dt + \int_0^{2x} f(t)\,dt$$

$$= -\psi(x) + \psi(2x)$$

بما أن : $x \to 2x$ و $x \to \psi(x)$ قابلتين للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$

فإن F قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.

و لدينا كذلك : $xf(x) \leq F(x) \leq xf(2x)$

يعني : $f(x) \leq \frac{F(x)}{x} \leq f(2x)$

يعني : $f(x) \leq \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \leq f(2x)$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(2x) = 0$

و منه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{F(x) - F(0)}{x - 0}\right) = 0$

و بالتالي : f قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر و $F'_d(0) = 0$

■ (III) ② ب

لدينا حسب السؤال أ

$$F(x) = \psi(2x) - \psi(x)$$

إذن : $F'(x) = 2\psi'(2x) - \psi'(x)$

$$\Leftrightarrow \quad F'(x) = 2f(2x) - f(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad F'(x) = 2(2x+2)e^{\frac{-1}{x}} - (x+2)e^{\frac{-2}{x}}$$

$$\Leftrightarrow \quad F'(x) = e^{\frac{-2}{x}}\left(2(2x+2)e^{\frac{1}{x}} - (x+2)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad F'(x) = e^{\frac{-2}{x}}\left((4x+4)e^{\frac{1}{x}} - (x+2)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad F'(x) = e^{\frac{-2}{x}}\left((x+2+3x+2)e^{\frac{1}{x}} - (x+2)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad F'(x) = e^{\frac{-2}{x}}\left((x+2)e^{\frac{1}{x}} + (3x+2)e^{\frac{1}{x}} - (x+2)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad F'(x) = e^{\frac{-2}{x}}\left((x+2)\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) + (3x+2)e^{\frac{1}{x}}\right)$$

و لدينا كذلك حسب السؤال ② أ $F'_d(0) = 0$

■ (III) 3

بما أن : $x>0$ فإن : $e^{\frac{1}{x}}-1>0$

و $(3x+2)>0$ و $(x+2)>0$

و منه : $F'(x)>0$

و بالتالي : F دالة تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$.

و لدينا : $xf(x)\le F(x)\le xf(2x)$

و $\lim\limits_{x\to0^+} xf(x)=\lim\limits_{x\to0^+} xf(2x)=0$

إذن : $\lim\limits_{x\to0^+} F(x)=0$

x	0	$+\infty$
$F'(x)$	+	
F	0 ↗	$+\infty$

التمرين الرابع : (4,5 ن)

■ 1 أ

ننطلق من الكتابة : $f(iy)=iy$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{i(iy)-1}{(iy+1)^2}=iy$$

$$\Leftrightarrow \quad iy(iy+1)^2=-y-1$$

$$\Leftrightarrow \quad iy(-y^2+2iy+1)=-y-1$$

$$\Leftrightarrow \quad -iy^3+iy-2y^2=-y-1$$

$$\Leftrightarrow \quad i(-y^3+y)+(1-y)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}(-y^3+y)=0\\ (1-y)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}y(1-y)(1+y)=0\\ (1-y)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}y=0 \text{ أو } y=1 \text{ أو } y=-1\\ y=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{y=1}$$

و بالتالي : $\boxed{f(i)=i}$

■ 1 ب

ننطلق من الكتابة : $f(z)=z$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{iz-1}{z^2+2z+1}=z$$

$$\Leftrightarrow \quad z^3+2z^2+z=iz-1$$

$$\Leftrightarrow \quad z^3+2z^2+(1-i)z+1=0$$

هذه المعادلة تقبل حلا خاصا و هو العدد 1 و ذلك حسب السؤال أ

ننجز القسمة الأقليدية للحدودية $z^3+2z^2+(1-i)z+1$
على الحدودية $(z-i)$ نحصل على :

$$(z-i)(z^2+(2+i)z+i)=0$$

بتعميل ثلاثية الحدود $z^2+(2-i)z+i$ نحصل على :

لدينا : $\Delta=(2-i)^2-4i=3$

إذن ثلاثية الحدود تقبل جذرين z_1 و z_2 :

$$z_1=-1+\frac{\sqrt3}{2}-\frac12 i \quad \text{و} \quad z_2=-1-\frac{\sqrt3}{2}-\frac12 i$$

و بالتالي : المعادلة $f(z)=z$ تقبل ثلاثة حلول و هي : $z_0=i$ و z_1 و z_2 .

■ 2 أ

لدينا : $z_1+1=\frac{\sqrt3}{2}-\frac12 i=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$$=\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)$$

$$=e^{\frac{-i\pi}{6}}$$

و بما أن : $\frac{11\pi}{6}\equiv\frac{-\pi}{6}[2\pi]$

فإن : $\boxed{z_1+1=e^{\frac{-\pi i}{6}}=e^{\frac{11\pi}{6}}}$ (1)

و لدينا كذلك :

$$z_2+1=\frac{-\sqrt3}{2}-\frac12 i=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$=\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right)=e^{\frac{-5i\pi}{6}}$$

و بما أن : $\frac{7\pi}{6} \equiv \frac{-5\pi}{6}[2\pi]$

فإن : $\boxed{z_2 + 1 = e^{\frac{-5i\pi}{6}} = e^{\frac{7i\pi}{6}}}$ (2)

■ 2 ب

ليكن $z_1 = re^{i\theta}$. لدينا حسب النتيجة (1) : $z_1 + 1 = e^{\frac{11\pi}{6}}$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 + 1 = e^{\frac{11i\pi}{6}}$$

$$\Leftrightarrow \quad re^{i\theta} = e^{\frac{11i\pi}{6}} - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (S_1): \begin{cases} r\cos\theta = \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 1 \\ r\sin\theta = sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) \end{cases}$$

لنحسب أولا r .

$$(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = \left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 1\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \ r^2 = \cos^2\left(\frac{11\pi}{6}\right) + 1 - 2\,cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ r^2 = 2\left(1 - cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)$$

نستعين بالعلاقة المثلثية التالية : $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$

نحصل على :

$$\Leftrightarrow \ r^2 = 2\left(1 - 2cos^2\left(\frac{11\pi}{12}\right) + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \ r^2 = 4\left(1 - cos^2\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)$$

ثم نستعين بعد ذلك بالعلاقة المثلثية التالية : $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

نحصل على : $r^2 = 4\sin^2\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

و منه : $r = \pm 2\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

نعلم أن معيار عدد عقدي يكون دائما عددا حقيقيا موجبا

إذن : $\boxed{r = 2\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)}$

نعوض r بقيمته في المعادلة الثانية من النظمة (S_1) نحصل على :

$$2\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\sin\theta = \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)}\right)$$

نستعين بالعلاقة المثلثية التالية : $\sin(2\varphi) = 2\cos(\varphi)\sin(\varphi)$

نحصل على :

$$\sin\theta = \left(\frac{\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)}{sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\theta = \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{11\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\theta = \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \theta \equiv \frac{17\pi}{12}[2\pi]$$

و بالتالي : $\boxed{z_1 = 2\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)e^{\frac{17i\pi}{12}}}$

ليكن $z_2 = se^{i\varphi}$. لدينا حسب النتيجة (2) : $z_2 + 1 = e^{\frac{7i\pi}{6}}$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 + 1 = e^{\frac{7i\pi}{6}}$$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 = e^{\frac{7i\pi}{6}} - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad se^{i\varphi} = e^{\frac{7i\pi}{6}} - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (S_2): \begin{cases} s\cos\varphi = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 1 \\ s\sin\varphi = sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \end{cases}$$

بنفس الطريقة نحسب أولا s .

$$s^2 = 2\left(1 - cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) \underset{\text{بنفس الطريقة}}{\Leftrightarrow} s = \pm 2\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

نعلم أن معيار عدد عقدي يكون دائما عددا حقيقيا موجبا

إذن : $\boxed{s = 2\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$

نعوض s بقيمته في المعادلة الثانية من النظمة (S_2) نحصل على :

$$2\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\sin\varphi = \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)}\right) \underset{\text{الطريقة}}{\overset{\text{بنفس}}{=\!=}} \sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$$

و منه : $\Rightarrow \quad \varphi \equiv \frac{13\pi}{12}[2\pi]$

و بالتالي : $\boxed{z_2 = 2\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)e^{\frac{13i\pi}{12}}}$

■ 3 أ

لدينا : $z = e^{i\alpha}$ إذن : $|z| = 1$ و منه : $z\bar{z} = 1$

لدينا :

$$\overline{f(z)} = \overline{\left(\frac{iz-1}{(z+1)^2}\right)} = \frac{-i\bar{z}-1}{(\bar{z}+1)^2} = \frac{\bar{z}i(-1+iz)}{\bar{z}^2(1+z)^2}$$

$$= iz\left(\frac{-1+iz}{(1+z)^2}\right)$$

$$= izf(z)$$

■ 3 ب

ننطلق من الكتابة : $f(z) + \overline{f(z)} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad f(z) + izf(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+iz)f(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (1+iz) = 0 \\ f(z) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1+iz = 0 \\ iz-1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = i \\ z = -i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} e^{i\alpha} = e^{\frac{i\pi}{2}} \\ e^{i\alpha} = e^{\frac{-i\pi}{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$$

بما أن : $0 \leq \alpha \leq \pi$ إذن α تأخذ قيمة وحيدة و هي : $\frac{\pi}{2}$

و بالتالي : $\boxed{\alpha \equiv \frac{\pi}{2}}$

■ 3 ج

لدينا : $z = e^{i\alpha}$

في هذا السؤال يجب استحضار جميع قواعد الحساب المثلثي.

لدينا : $f(z) = f\left(e^{i\alpha}\right) = \dfrac{ie^{i\alpha}-1}{(e^{i\alpha}+1)^2}$

و لدينا : $\left(e^{i\alpha}+1\right)^2 = (\cos\alpha + i\sin\alpha + 1)^2$

$$\Leftrightarrow \quad \left(e^{i\alpha}+1\right)^2 = (\cos\alpha + i\sin\alpha + 1)^2$$

$$= \left(2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 + 2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 1\right)^2$$

$$= \left(2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2$$

$$= \left(2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right)^2$$

$$= 4\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(e^{\frac{i\alpha}{2}}\right)^2$$

$$= \boxed{4\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\alpha}}$$

إذن : $f(z) = \dfrac{ie^{i\alpha}-1}{4\,cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\alpha}} = \left(\dfrac{1}{2\,cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)\left(\dfrac{ie^{i\alpha}-1}{2e^{i\alpha}}\right)$

سنحاول الآن إيجاد الشكل المثلثي للتعبير : $\left(\dfrac{ie^{i\alpha}-1}{2e^{i\alpha}}\right)$

نضع : $\left(\dfrac{ie^{i\alpha}-1}{2e^{i\alpha}}\right) = rcos(\varphi) + i\,rsin(\varphi)$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-i\alpha}\left(ie^{i\alpha}-1\right) = 2r\,cos(\varphi) + 2i\,r\,sin(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \quad i - e^{-i\alpha} = 2r\,cos(\varphi) + 2i\,r\,sin(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \quad i - cos(-\alpha) - i\,sin(-\alpha) = 2r\,cos(\varphi) + 2i\,r\,sin(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \quad i - cos(\alpha) + i\,sin(\alpha) = 2r\,cos(\varphi) + 2i\,r\,sin(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \quad -cos(\alpha) + i\left(1 + sin(\alpha)\right) = 2rcos(\varphi) + i\left(2rsin(\varphi)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -cos(\alpha) = 2rcos(\varphi) \\ 1 + sin(\alpha) = 2rsin(\varphi) \end{cases}$$

لدينا : $(2r\,cos\varphi)^2 + (2r\,sin\varphi)^2 = 4r^2$

$$\Leftrightarrow \quad (-cos\varphi)^2 + \left(1 + sin(\alpha)\right)^2 = 4r^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\left(1 + sin(\alpha)\right) = 4r^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\left(1 - cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 4r^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\left(1-2cos^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+1\right)=4r^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\left(1-cos^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=4r^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=4r^2$$

$$\Leftrightarrow \quad r=\pm sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

بما أن معيار عدد عقدي يكون دائما عدد موجبا

و بما أن : $0<\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}<\pi$

لأن : $0\leq\alpha<\pi$

فإن : $\boxed{r=sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$ (1)

نعوض r بقيمته في المعادلة الأولى من النظمة نجد :

$$-cos(\alpha)=2sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)cos(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \quad cos(\pi-\alpha)=2sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)cos(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \quad sin\left(\pi-\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=2sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)cos(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \quad sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=2sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)cos(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \quad sin\left(2\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)=2sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)cos(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow 2sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=2sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)cos(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \quad cos(\varphi)=\frac{2sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

و لدينا : $sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=sin\left(\pi-\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$

$$=sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$$

و منه : $cos(\varphi)=\frac{\cancel{2sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cancel{2sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}$

$$=cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

إذن : $\boxed{\varphi\equiv\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)[2\pi]}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $\left(\frac{ie^{i\alpha}-1}{2e^{i\alpha}}\right)=sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$

و بالتالي : $\boxed{f(z)=\underbrace{\left(\frac{sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)}_{\text{المعيار } r}e^{\underbrace{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}_{\text{العمدة } \varphi}}}$

■ **4**

بما أن $|z|=1$ فإن z يكتب على الشكل $e^{i\alpha}$.

لدينا : $\Re e\left(f(z)\right)=\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \Re e\left(\left(\frac{sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\times\frac{\left(cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)+sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{1}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)+cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\left(sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)-cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=1$$

$$\frac{sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\cancel{sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}+\cancel{sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}-cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=2$$

$$\Leftrightarrow \; sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \; 1-2cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \; 1=4cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \; cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{أو} \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{2} \equiv \frac{\pi}{3}[\pi] \quad \text{أو} \quad \frac{\alpha}{2} \equiv \frac{2\pi}{3}[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha \equiv \frac{2\pi}{3}[\pi] \quad \text{أو} \quad \alpha \equiv \frac{4\pi}{3}[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 = e^{\frac{2i\pi}{3}} \quad \text{أو} \quad z_1 = e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{أو} \quad z_1 = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

■ و الحمد لله رب العالمين ■