



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الإستدراكية 2010
الموضوع



الصفحة
1
3

7	المعامل:	RS22	الرياضيات	المادة:
3	مدة الإنجاز:	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكها		الشعب(ة) أو المسلك:

معلومات عامة

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛

مدة إنجاز موضوع الامتحان : 3 ساعات ؛

عدد الصفحات : 3 صفحات (الصفحة الأولى تتضمن معلومات والصفحتان المتبقيتان تتضمنان تمارين الامتحان)؛

يمكن للمرشح إنجاز تمارين الامتحان في الترتيب الذي يناسبه ؛

ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة .

بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمرين فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه ولا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة .

معلومات خاصة

يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها و تتوزع حسب المجالات كما يلي :

التمرين	المجال	النقطة الممنوحة
التمرين الأول	الهندسة الفضائية	3 نقط
التمرين الثاني	الأعداد العقدية	3 نقط
التمرين الثالث	حساب الاحتمالات	3 نقط
التمرين الرابع	المتتاليات العددية	3 نقط
التمرين الخامس	دراسة دالة وحساب التكامل	8 نقط

بالنسبة للتمرين الخامس ، \ln يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري .

الموضوع

التمرين الأول (3 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقط $A(0, -2, 0)$ و $B(1, 1, -4)$

و $C(0, 1, -4)$ و مجموعة النقط $M(x, y, z)$ بحيث : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$.

1 بين أن (S) هي الفلكة التي مركزها النقطة $\Omega(1, 2, 3)$ و شعاعها 5 . 0.5

2 أ - بين أن $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$ واستنتج أن $4y + 3z + 8 = 0$ هي معادلة ديكرتية للمستوى (ABC) . 1

ب - احسب $d(\Omega, (ABC))$ ثم استنتج أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S) . 0.5

3 ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة Ω والعمودي على المستوى (ABC) .

أ - بين أن : $\begin{cases} x=1 \\ y=2+4t \\ z=3+3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ هو تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) . 0.5

ب - بين أن مثلث إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوى (ABC) هو $(1, -2, 0)$. 0.25

ج - تحقق من أن H هي نقطة تماس المستوى (ABC) والفلكة (S) . 0.25

التمرين الثاني (3 ن)

1 حل في مجموعة الأعداد العقدية C المعادلة : $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$ 1

2 نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) ، النقط A و B و C التي أحاقها

على التوالي هي : $a = 8i$ و $b = 4\sqrt{3} - 4i$ و $c = 2(4\sqrt{3} + 4i)$.

ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $\frac{4\pi}{3}$.

أ - بين أن $z' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$. 0.5

ب - تحقق من أن النقطة B هي صورة النقطة A بالدوران R . 0.25

ج - بين أن $\frac{a-b}{c-b} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ثم اكتب العدد $\frac{a-b}{c-b}$ على الشكل المثلي . 0.75

د - استنتج أن المثلث ABC متساوي الأضلاع . 0.5

التمرين الثالث (3 ن)

يحتوي صندوق على ثماني كرات تحمل الأعداد : 1 و 1 و 1 و 1 و 2 و 2 و 2 و 2 و 3 و 3 (لا يمكن التمييز بينها باللمس) .

نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق .

1 ليكن A الحدث : " الحصول على كرتين تحملان معا العدد 2 " . 1.25

و B الحدث : " الحصول على كرتين إحداهما على الأقل تحمل العدد 3 " .

بين أن $P(A) = \frac{3}{28}$ وأن $P(B) = \frac{13}{28}$.

2 ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات التي تحمل عددا فرديا .

أ - حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X . 0.25

ب - بين أن : $P(X=1) = \frac{15}{28}$. 0.75

ج - أعط قانون احتمال المتغير العشوائي X . 0.75

التمرين الرابع (3 ن)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{3u_n}{21+u_n}$ لكل n من \mathbb{N} .

0.5 (1) بين أن : $u_n > 0$ لكل n من \mathbb{N} .

0.75 (2) بين أن : $u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$ لكل n من \mathbb{N} .

0.5 (3) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية وأنها متقاربة .

0.75 (4) أ- بين بالترجع أن : $u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$ لكل n من \mathbb{N} .

0.5 ب- حدد نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الخامس (8 ن)

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 3$.

0.25 (1) أ- تحقق من أن $3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2 + 3x + 2)$ لكل x من $]0, +\infty[$.

0.5 ب - بين أن : $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2 + 3x + 2)}{x}$ لكل x من $]0, +\infty[$.

0.25 (2) أ- تحقق من أن $\frac{3x^2 + 3x + 2}{x} > 0$ لكل x من $]0, +\infty[$.

0.5 ب - استنتج أن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$ على $]0, +\infty[$.

0.5 (3) أ- بين أن الدالة g تناقصية على $]0, 1[$ وأنها تزايدية على $]1, +\infty[$.

0.5 ب - استنتج أن $g(x) > 0$ لكل x من $]0, +\infty[$ (لاحظ أن $g(1) > 0$) .

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = x - 1 + \frac{x-1+\ln x}{x^2}$.

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) (نأخذ $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm}$) .

1 (1) بين أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ لكل x من $]0, +\infty[$ ، ثم استنتج أن الدالة f تزايدية على $]0, +\infty[$.

0.5 (2) أ - بين أن $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ ثم أول هذه النتيجة هندسيا .

0.75 ب - بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1+\ln x}{x^2} = 0$ ثم أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (نذكر أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$) .

0.5 ج - بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

0.5 (3) بين أن $y = 3(x-1)$ هي معادلة للمستقيم المماس للمنحنى (C) في النقطة التي زوج إحداثياتها $(1, 0)$.

0.75 (4) أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة غير مطلوب تحديدها) .

1 (5) أ - باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن : $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{2}{e}$ (ضع : $u'(x) = \frac{1}{x^2}$ و $v(x) = \ln x$) .

0.5 ب - بين أن مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (Δ) و المستقيمين الذين معادلتاهما $x = e$ و $x = 1$ هي

$$\left(1 - \frac{1}{e}\right) \text{cm}^2$$

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 1 \\ y = 4t + 2 \\ z = 3t + 3 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}) \quad \text{يعني}$$

و هذه النظمة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامترى للمستقيم (Δ) .



$$\begin{cases} (ABC) : 4y + 3z + 8 = 0 \\ \text{لدينا} : \begin{cases} x = 1 \\ (\Delta) : \begin{cases} y = 2 + 4t \\ z = 3t + 3 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}) \end{cases} \end{cases}$$

نعلم أن $H(\alpha, \beta, \gamma)$ هي نقطة تماس الفلكة (S) و المستوى (ABC) .

$$\text{إذن : } (1) \quad \overline{\Omega H} \perp \overline{(ABC)}$$

و نعلم كذلك أن : (2) $\overline{(\Delta)} \perp \overline{(ABC)}$ و (3) $\overline{\Omega \epsilon(\Delta)}$

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن : $(\Omega H) = (\Delta)$ يعني $H \in (\Delta)$

و لتحديد إحداثيات النقطة H نطلق من النظمة التالية : $\begin{cases} H \in (\Delta) \\ H \in (ABC) \end{cases}$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 4t + 2 \\ \gamma = 3t + 3 \\ 4\beta + 3\gamma + 8 = 0 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}) \quad \text{و هذه النظمة تكافئ}$$

نعوض قيم α و β و γ في المعادلة الرابعة من النظمة نحصل على :

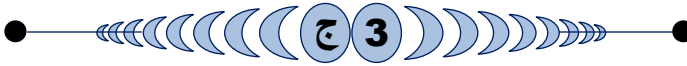
$$4(4t + 2) + 3(3t + 3) + 8 = 0$$

نحل هذه المعادلة البسيطة نحصل على : $t = -1$

نعوض t بالعدد -1 في المعادلات الثلاث الأولى نجد :

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 4(-1) + 2 = -2 \\ \gamma = 3(-1) + 3 = 0 \end{cases}$$

و بالتالي : $H(1; -2; 0)$ هي نقطة تقاطع (Δ) و المستوى (ABC) .



للتحقق من أن $H(1; -2; 0)$ هي نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة (S) يكفي أن نتحقق من أن مثلث إحداثيات النقطة H يحقق كلا من معادلتى المستوى (ABC) و الفلكة (S) .

$$\begin{cases} \text{لدينا} : \begin{cases} (S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0 \\ (ABC) : 4y + 3z + 8 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

يكفي إذن أن نعوض x و y و z على التوالي بالأعداد 1 و -2 و 0

في معادلتى (ABC) و (S) و نرى هل تتحقق المتساويات.

$$\text{لدينا} : 1^2 + (-2)^2 + 0^2 - 2 \times 1 - 4(-2) - 6 \times 0 - 11 = 0$$

إذن : $H \in (S)$

$$\text{و لدينا كذلك} : 4(-2) + 3(0) + 8 = -8 + 8 = 0$$

إذن : $H \in (ABC)$

و بالتالي : H هي نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة (S) .

التمرين الثاني :



$$\text{نحل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة} : z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$$

$$\text{لدينا} : \Delta = (-8\sqrt{3})^2 - 4 \times 64 = -64 = (8i)^2$$

إذن : المعادلة تقبل الحلين العقديين z_1 و z_2 المعرفين بما يلي :

$$z_1 = \frac{8\sqrt{3} - 8i}{2} = 4\sqrt{3} - 4i \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{8\sqrt{3} + 8i}{2} = 4\sqrt{3} + 4i$$

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2010

التمرين الأول :



لدينا الفلكة (S) معرفة بمعادلتها الديكارية التالية :

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$$

نغير شكل المعادلة بالطريقة التالية :

$$(x^2 - 2x) + (y^2 - 4y) + (z^2 - 6z) - 11 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 - 11 = 14 \quad \text{يعني}$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25 \quad \text{يعني}$$

إذن (S) فلكة مركزها $\Omega(1; 2; 3)$ و شعاعها $R = 5$.



لدينا : $A(0; -2; 0)$ و $B(1; 1; -4)$ و $C(0; 1; -4)$.

إذن : $\overline{AB}(1; 3; -4)$ و $\overline{AC}(0; 3; -4)$.

$$\begin{aligned} \overline{AB} \wedge \overline{AC} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{و منه} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= 0\vec{i} - (-4)\vec{j} + 3\vec{k} \\ &= 4\vec{j} + 3\vec{k} \end{aligned}$$

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من المستوى (ABC) .

بما أن المتجهة $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ متجهة منظمية على المستوى (ABC) .

فإن : المتجهتان \overline{AM} و $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ متعامدتان.

$$\text{يعني أن : } \overline{AM} \cdot (\overline{AB} \wedge \overline{AC}) = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y + 2 \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{يعني}$$

$$4y + 3z + 8 = 0 \quad \text{يعني} : 0x + 4(y + 2) + 3z = 0$$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .



لدينا : $\Omega(1, 2, 3)$ و $(ABC) : 4y + 3z + 8 = 0$

$$\text{إذن : } d(\Omega, (ABC)) = \frac{|0 + 8 + 9 + 8|}{\sqrt{0^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{25}{\sqrt{25}} = \sqrt{25} = 5$$

نلاحظ أن : $d(\Omega, (ABC)) = R$

إذن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S) في النقطة $H(\alpha, \beta, \gamma)$



علما أن المتجهة $\overline{AB} \wedge \overline{AC}(0, 4, 3)$ منظمية على المستوى (ABC) .

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من المستقيم (Δ) .

بما أن (Δ) مار من Ω و عمودي على (ABC) .

فإن المتجهتان \overline{AM} و $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ متجهتان مستقيمتان.

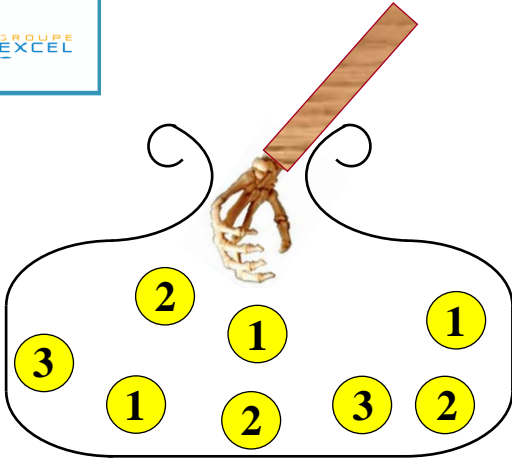
$$\text{يعني} : \overline{AM} = t \vec{n} \quad (\exists t \in \mathbb{R})$$

$$\text{يعني} : \begin{cases} x - 1 = 0t \\ y - 2 = 4t \\ z - 3 = 3t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}) \quad (\Delta) :$$

$$\begin{cases} BA = BC \\ \widehat{ABC} = 60^\circ \end{cases} \text{ أو بتعبير آخر :}$$

و هذا يعني أن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه B و قياس الزاوية \widehat{B} هو 60° .
و بالتالي : ABC مثلث متساوي الأضلاع .

التمرين الثالث :



عندما نسحب عشوائيا كرتين بالتتابع و بدون إحلال من صندوق يحتوي على 8 كرات فإنه توجد C_8^1 إمكانية لسحب الكرة الأولى و توجد C_7^1 إمكانية لسحب الكرة الثانية .

إذن هذه التجربة العشوائية تحتل $C_8^1 \times C_7^1$ نتيجة ممكنة .

$$\text{يعني : } \text{card}(\Omega) = C_8^1 \times C_7^1 = 8 \times 7 = 56$$

بحيث : Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

1

للحصول على كرتين تحملان معا العدد 2 لدينا :

C_3^1 إمكانية لسحب كرة أولى تحمل 2 في السحبة الأولى .

C_2^1 إمكانية لسحب كرة ثانية تحمل 2 في السحبة الثانية .

إذن احتمال الحصول على كرتين تحملان معا العدد 2 يساوي :

$$p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_3^1 \times C_2^1}{56} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

الحصول على كرتين إحداهما على الأقل تحمل 3 يمكن أن يتم عن طريق حالتين و هما :

الحالة الأولى : الحصول على الكرة الأولى تحمل 3 و الكرة الثانية تخالف 3

بـ $C_2^1 \times C_7^1$ إمكانية .

الحالة الثانية : الحصول على الكرة الأولى مخالفة لـ 3 و الكرة الثانية تحمل 3

بـ $C_6^1 \times C_2^1$ إمكانية .

إذن : احتمال الحصول على كرتين إحداهما على الأقل 3 يساوي :

$$p(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_2^1 \times C_7^1 + C_6^1 \times C_2^1}{56} = \frac{26}{56} = \frac{13}{28}$$

2

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات التي تحمل عددا فرديا .

عندما نسحب كرتين بالتتابع و بدون إحلال من صندوق يحتوي على خمس كرات تحمل أعدادا فردية و 3 كرات تحمل أعدادا زوجية . فإنه يُحتمل أن نحصل على كرات كلها تحمل أعدادا فردية أو كرة واحدة تحمل عددا فرديا .

و يمكن ألا نحصل على أية كرة تحمل عددا فرديا .

2

$$\begin{cases} aff(A) = a = 8i \\ aff(B) = b = 4\sqrt{3} - 4i \\ aff(C) = c = 2(4\sqrt{3} + 4i) \\ aff(M) = z \\ aff(M') = z' \end{cases} \text{ لدينا :}$$

$$\mathcal{R}_0\left(\frac{4\pi}{3}\right) : (P) \mapsto (P) \quad \text{و لدينا الدوران } \mathcal{R} \text{ معرف بما يلي :}$$

$$M(z) \mapsto M'(z')$$

$$(z' - 0) = e^{\frac{i4\pi}{3}}(z - 0) \quad \text{إذن حسب التعريف العقدي للدوران } \mathcal{R} :$$

$$\mathcal{R}(M) = M' \quad \text{ننتقل من الكتابة :}$$

$$z' = \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) z \quad \text{يعني :}$$

$$z' = \left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) z \quad \text{يعني :}$$

$$z' = \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) z \quad \text{يعني :}$$

$$z' = \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) z \quad \text{يعني :}$$

2

$$aff(A) \times \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8i \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{لدينا :}$$

$$= -4i + 4\sqrt{3} = aff(B)$$

$$aff(A) = \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times aff(B) \quad \text{حصلنا إذن على العلاقة التالية :}$$

و هي نفسها الكتابة العقديّة للدوران \mathcal{R}

و من تلك الكتابة نستنتج أن : $\mathcal{R}(A) = B$

2

$$\frac{a - b}{c - b} = \frac{8i - (4\sqrt{3} - 4i)}{2(4\sqrt{3} + 4i) - (4\sqrt{3} - 4i)} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{12i - 4\sqrt{3}}{4\sqrt{3} + 12i} = \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{3}i - 1)}{4\sqrt{3}(1 + \sqrt{3}i)}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}i - 1)(\sqrt{3}i - 1)}{(1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3}i - 1)} = \frac{(\sqrt{3}i)^2 - 2(\sqrt{3}i) + 1^2}{(\sqrt{3}i)^2 - 1}$$

$$= \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{-4} = \frac{-2}{-4} + \frac{-2\sqrt{3}i}{-4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{\frac{i\pi}{3}}$$

$$\frac{a - b}{c - b} = e^{\frac{i\pi}{3}} \quad \text{إذن :}$$

2

$$\begin{cases} \left|\frac{a - b}{c - b}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{a - b}{c - b}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \quad \text{حصلنا على : } \frac{a - b}{c - b} = e^{\frac{i\pi}{3}} \quad \text{يعني :}$$

$$\begin{cases} BA = BC \\ \left(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \quad \text{يعني : } \begin{cases} |a - b| = |c - b| \\ \left(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{3u_n}{21 + u_n} > 0$

أي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} > 0$

يعني أن العبارة (P_{n+1}) عبارة صحيحة .

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

2

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .

لدينا $u_n > 0$ إذن التعبير $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مُعرَّف (المقام يجب أن يخالف الصفر)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3u_n}{21 + u_n} \times \frac{1}{u_n} = \frac{3}{21 + u_n}$$

لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{21 + u_n}$

نعلم أن : $u_n > 0$ إذن : $21 + u_n > 21$

$$\frac{3}{21 + u_n} < \frac{3}{21} \quad \text{يعني} \quad \frac{1}{21 + u_n} < \frac{1}{21}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{7} \quad \text{يعني} \quad \frac{3}{21 + u_n} < \frac{1}{7}$$

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < \frac{1}{7} u_n$

3

نعلم أن : $\frac{1}{7} < 1$

نضرب هذه المتفاوتة في العدد الموجب قطعاً u_n نحصل على :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{7} u_n < u_n \quad (1)$$

و نعلم كذلك حسب السؤال (2) أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < \frac{1}{7} u_n$ (2)

إذن من النتيجتين (1) و (2) نجد ما يلي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < u_n$ و بالتالي : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تناقصية .

و بما أنها مصغورة بالعدد 0 ($u_n > 0$) فإنها متقاربة .

4

من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 1 \leq \left(\frac{1}{7}\right)^0$

إذن العبارة صحيحة من أجل $n = 0$

نفترض أن $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$

لدينا حسب السؤال (2) : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < \frac{1}{7} u_n$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < \frac{1}{7} u_n \leq \frac{1}{7} \left(\frac{1}{7}\right)^n$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$

إذن العبارة صحيحة من أجل $(n + 1)$

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$

4

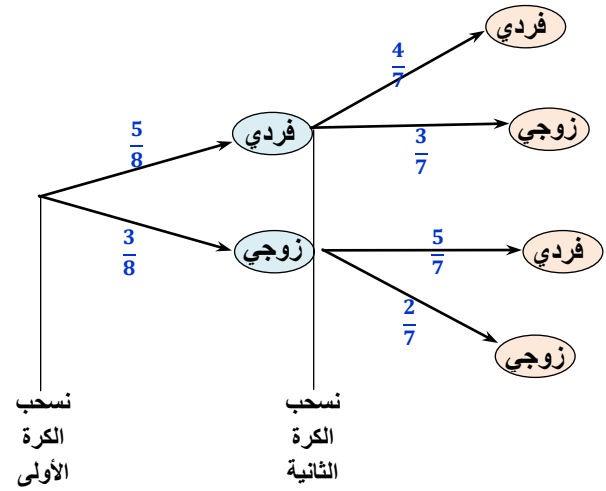
لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$

و بما أن : $\left(\frac{1}{7}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ و هو عدد موجب و أصغر من 1

إذن : القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي X هي : 0 أو 1 أو 2

أو بتعبير أجمل : $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

للإجابة على الأسئلة الأخرى نستعين بشجرة الاحتمالات التالية و التي تم الحصول عليها انطلاقاً من التجربة العشوائية (السحب العشوائي بالتتابع و بدون إحلال)



2

$p[X = 1]$ هو احتمال الحصول بالضبط على كرة تحمل عددا فرديا .

إذن حسب شجرة الاحتمالات السابقة :

$$p[X = 1] = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$

2

نقصد بقانون احتمال المتغير العشوائي X التطبيق التالي :

$$P_X : \{0; 1; 2\} \mapsto [0; 1]$$

لدينا حسب السؤال (1) : $p(A) = \frac{3}{28}$ إذن : $p[X = 0] = \frac{3}{28}$

$$p[X = 2] = 1 - p[X = 0] - p[X = 1] = 1 - \frac{3}{28} - \frac{15}{28} = \frac{5}{14}$$

و بالتالي : قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعروف

بما يلي : $P_X : \{0; 1; 2\} \mapsto [0; 1]$

$$0 \mapsto p[X = 0] = \frac{3}{28}$$

$$1 \mapsto p[X = 1] = \frac{15}{28}$$

$$2 \mapsto p[X = 2] = \frac{5}{14}$$

التمرين الرابع :

1

نبرهن على صحة العبارة (P_n) التالية : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$ (P_n)

لدينا : $u_0 = 1 > 0$ إذن العبارة (P_0) صحيحة .

نفترض أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

إذن : u_n كمية موجبة قطعاً .

و منه فإن الكميتان $3u_n$ و $u_n + 21$ موجبتان قطعاً كذلك .

إذن الكمية $\frac{3u_n}{u_n + 21}$ موجبة قطعاً باعتبارها خارج كميتين موجبتين .

(1) $\forall x \in]0; 1]$; $g(x) > 0$: ولدينا : $g(1) > 0$. إذن :

الحالة الثانية : $x \in [1; +\infty[$ يعني : $x \geq 1$

إذن : $g(x) \geq g(1)$ (لأن g تزايدية على $]1; +\infty[$)

(2) $\forall x \in [1; +\infty[$; $g(x) > 0$: ولدينا : $g(1) > 0$. إذن :

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $\forall x \in]0; +\infty[$; $g(x) > 0$.



فإن : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$

و بالتالي : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة و تؤول على الصفر . $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

التمرين الخامس :

ليكن x عنصرا من المجال $]0; +\infty[$. لدينا :

$$(x-1)(3x^2+3x+2) = 3x^3+3x^2+2x-3x^2-3x-2 = 3x^3-x-2$$

ليكن x عنصرا من المجال $]0; +\infty[$.

لدينا : $g(x) = x^3 - x - 2 \ln x + 3$: إذن :

$$g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3 - x - 2}{x} = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$$

ليكن x عنصرا من المجال $]0; +\infty[$. يعني : $x > 0$

إذن : $x > 0$ و $3x^2 + 3x + 2 > 0$

ومنه : $\frac{3x^2+3x+2}{x}$ موجبة قطعيا باعتبارها خارج كمتبتين موجبتين قطعيا .

و بالتالي : $(\forall x > 0) ; \frac{3x^2+3x+2}{x} > 0$

ليكن x عنصرا من المجال $]0; +\infty[$.

$$g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$$

و لقد علمنا من قبل أن : $(\forall x > 0) ; \frac{3x^2+3x+2}{x} > 0$

إذن : إشارة $g'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $(x-1)$ على المجال $]0; +\infty[$.

ليكن x عنصرا من المجال $]0; 1]$. إذن : $x \leq 1$

يعني : $(x-1) \leq 0$ و منه : $g'(x) \leq 0$

يعني أن الدالة g تناقصية على المجال $]0; 1]$.

ليكن x عنصرا من المجال $]1; +\infty[$. إذن : $x \geq 1$

و منه : $(x-1) \geq 0$ يعني : $g'(x) \geq 0$

يعني أن الدالة g تزايدية على المجال $]1; +\infty[$.

ليكن x عنصرا من المجال $]0; +\infty[$. نفصل بين حالتين :

الحالة الأولى : $x \in]0; 1]$ يعني : $x \leq 1$

إذن : $g(x) \geq g(1)$ (لأن g تناقصية على $]0; 1]$)

لدينا : $f(x) = x - 1 + \frac{x-1+\ln x}{x^2}$

$$f'(x) = 1 + \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 2x(x-1+\ln x)}{x^4}$$

$$= 1 + \frac{x^2 + x - 2x^2 + 2x - 2x \ln x}{x^4}$$

$$= 1 + \frac{-x^2 + 3x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x^3 - x - 2 \ln x + 3}{x^3}$$

و بالتالي : $(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

نعلم حسب السؤال (3) ب) : $(\forall x > 0) ; g(x) > 0$

و لدينا : $(\forall x > 0) ; x^3 > 0$

إذن : $(\forall x > 0) ; \frac{g(x)}{x^3} > 0$

يعني : $(\forall x > 0) ; f'(x) > 0$

و بالتالي : f دالة تزايدية قطعيا على المجال $]0; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - 1 + \frac{x-1+\ln x}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - 1 + \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) \right)$$

$$\begin{matrix} \nearrow 0^+ & \nearrow 0^+ & \searrow -\infty \\ +\infty & +\infty & -\infty \end{matrix}$$

$$= 0 - 1 + (+\infty)(1 - \infty - \infty)$$

$$= -1 + (+\infty)(+\infty) = -1 - \infty = -\infty$$

و بالتالي : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

و تأويل هذه النهاية هندسيا هو : " المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (محور الأرتايب) مقارب عمودي للمنحنى (\mathcal{C}) بجوار الصفر على اليمين

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1+\ln x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$= 0(1 - 0 + 0) = 0$$



ليكن x عنصرا من المجال $]0; 1]$. إذن : $x \leq 1$

يعني : $(x-1) \leq 0$ و منه : $g'(x) \leq 0$

يعني أن الدالة g تناقصية على المجال $]0; 1]$.

ليكن x عنصرا من المجال $]1; +\infty[$. إذن : $x \geq 1$

و منه : $(x-1) \geq 0$ يعني : $g'(x) \geq 0$

يعني أن الدالة g تزايدية على المجال $]1; +\infty[$.

ليكن x عنصرا من المجال $]0; +\infty[$. نفصل بين حالتين :

الحالة الأولى : $x \in]0; 1]$ يعني : $x \leq 1$

إذن : $g(x) \geq g(1)$ (لأن g تناقصية على $]0; 1]$)

5 II

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \int_1^e \underbrace{\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{u'} \times \underbrace{(\ln x)}_v dx = [uv]_1^e - \int_1^e uv dx$$

$$= \left[\frac{-\ln x}{x}\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{e} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e$$

$$= \frac{-1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$$



5 II

لتكن \mathcal{A} مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى (\mathcal{E}) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = e$ و $x = 1$.
نقيس المساحة \mathcal{A} باستعمال التكامل التالي:

$$\mathcal{A} = \int_1^e |f(x) - (x+1)| dx = \int_1^e \left| \frac{x-1+\ln x}{x^2} \right| dx$$

ولدينا: $x \in [1, e]$ إذن: (1) $x > 1$ و منه: (2) $\ln x > 0$

نجمع المتفاوتتين (1) و (2) طرفا بطرف نجد: $x + \ln x > 1$
يعني: $\forall x \in [1, e]; x - 1 + \ln x > 0$
و منه: $\forall x \in [1, e]; \frac{x-1+\ln x}{x^2} > 0$

أي: $\forall x \in [1, e]; \left| \frac{x-1+\ln x}{x^2} \right| = \frac{x-1+\ln x}{x^2}$

و بالتالي بالرجوع إلى آخر تعبير للمساحة \mathcal{A} نجد:

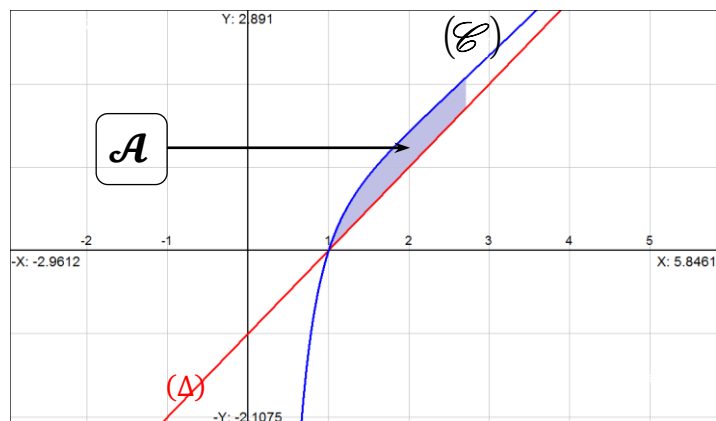
$$\mathcal{A} = \int_1^e \left| \frac{x-1+\ln x}{x^2} \right| dx = \int_1^e \left(\frac{x-1+\ln x}{x^2} \right) dx$$

$$= \int_1^e \frac{1}{x} dx - \int_1^e \frac{1}{x^2} dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$= [\ln x]_1^e - \left[\frac{-1}{x} \right]_1^e + \left(1 - \frac{2}{e} \right)$$

$$= 1 - \left(\frac{-1}{e} + 1 \right) + \left(1 - \frac{2}{e} \right) = \left(1 - \frac{2}{e} \right) \text{ unité}^2$$

$$= \left(1 - \frac{1}{e} \right) (1 \text{ cm})^2 = \left(1 - \frac{1}{e} \right) \text{ cm}^2$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 1 + \frac{x-1+\ln x}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 1 + \frac{x-1+\ln x}{x^2} \right)$$

$$= (+\infty) + 0 = +\infty$$

إذن: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2 II

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{x-1+\ln x}{x^3} \right)$$

$$= 1 - 0 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$= 1 + 0(1 - 0 + 0) = 1$$

إذن: (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

و لدينا كذلك:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{x-1+\ln x}{x^2} \right)$$

$$= -1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1+\ln x}{x^2} \right)$$

$$= -1 + 0 = -1$$

إذن: (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -1$

من النهايات (1) و (2) و (3) نستنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (\mathcal{E}) بجوار $+\infty$.

3 II

معادلة المماس (T) للمنحنى (\mathcal{E}) في النقطة التي زوج إحداثياتها $(1, 0)$
تكتب على الشكل: $(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$
لدينا: $f'(1) = 3$ و $f(1) = 0$
إذن: $(T): y = 3(x-1)$

