المـــــادة:	الرياضيات	RS24	المعامل:	9
الشعــب(ة) أو المسلك :	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)		مدة الإنجاز:	4

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين و مسألة جميعها مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية.
- التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية.
- التمرين الثالث يتعلق بحساب الإحتمالات.
- المسألة تتعلق بالتحليل.

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة القابلة للبرمجة

التمرين الأول :(3 نقط)

نذكر أن $\left(M_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$ حلقة واحدية غير تبادلية.

نعتبر المجموعة : $E=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\x&1&0\\x^2&2x&1\end{pmatrix} / \ x\in\mathbb{R}\right\}$

1) بين أن E جزء مستقر في $\left(M_3(\mathbb{R}),\times\right)$ 0.5

2) أ- بين أن التطبيق φ الذي يربط العدد الحقيقي x بالمصفوفة $M(x)$ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(E,\times)$. 0.5

ب- استنتج أن $(E,\times)$ زمرة تبادلية. 0.5

ج- حدد $M^{-1}(x)$ مقلوب المصفوفة $M(x)$ حيث x عدد حقيقي. 0.5

د- حل في المجموعة E المعادلة : $A^5X=B$ حيث : $A=M(2)$ و $B=M(12)$ و $A^5=\underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{5\text{ مرات}}$ 0.5

3) بين أن المجموعة : $F=\left\{M(\ln(x)) / \ x\in\mathbb{R}_+^*\right\}$ زمرة جزئية للزمرة $(E,\times)$. 0.5

التمرين الثاني :(4 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-4iz-2+2i\sqrt{3}=0$ (E)

أ- تحقق ان العدد العقدي $a=1+i(2-\sqrt{3})$ حل للمعادلة (E) 0.5

ب- استنتج b الحل الثاني للمعادلة (E) 0.5

2) أ - بين أن : $a^2=4(2-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$ 0.5

ب- اكتب العدد a على الشكل المثلثي. 0.75

3) نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي a و b و $c=2i+2e^{i\frac{\pi}{7}}$

لتكن (Γ) الدائرة التي أحد أقطارها $[AB]$

أ - حدد ω لحق النقطة Ω مركز الدائرة (Γ) 0.5

ب - بين أن النقطتين O و C تنتميان للدائرة (Γ) 0.5

ج- بين أن العدد العقدي $\dfrac{c-a}{c-b}$ تخيلي صرف. 0.75

التمرين الثالث :(3 نقط)

يحتوي صندوق على 10 كرات بيضاء و كرتين حمراوين .

نسحب الكرات من الصندوق الواحدة تلو الأخرى بدون إحلال إلى أن نحصل لأول مرة على كرة بيضاء ثم نوقف التجربة .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات المسحوبة.

1) أ- حدد مجموعة قيم المتغير العشوائي X 0.25

0.5 ب- احسب احتمال الحدث $[X=1]$

0.5 ج- بين أن : $p[X=2]=\dfrac{5}{33}$

0.5 د- احسب احتمال الحدث $[X=3]$

0.5 2) أ- بين أن: $E(X)=\dfrac{13}{11}$. (حيث $E(X)$ هو الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X)

0.75 ب- احسب $E(X^2)$ ثم استنتج قيمة $V(X)$.(حيث $V(X)$ هي مغايرة المتغير العشوائي X)

مسألة:(10 نقط)

I- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I=[0,1]$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{1-\ln(1-x)} & ; \quad 0\le x<1 \\ f(1)=0 \end{cases}$$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

0.5 1) بين أن الدالة f متصلة على اليسار في 1

0.5 2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في 1

0.75 3) أدرس تغيرات الدالة f على المجال I ثم أعط جدول تغيراتها.

0.5 4)أ- بين أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف وحيدة أفصولها $\dfrac{e-1}{e}$

0.75 ب- أنشئ المنحنى (C) مبرزا نصف مماسه في النقطة التي أفصولها 0 . (نأخذ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$)

0.5 5) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال I يحقق: $f(\alpha)=\alpha$

0.25 6) أ- بين أن الدالة f تقابل من المجال I نحو I .

0.5 ب- حدد $f^{-1}(x)$ لكل عنصر x من المجال I .

II- نضع : $I_0=\int_0^1 f(t)dt$ و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n : $I_n=\int_0^1 t^n f(t)dt$

0.75 1) بين أن المتتالية $(I_n)_{n\ge0}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة.

0.75 2) بين أن : $0\le I_n\le\dfrac{1}{n+1}$ $\quad(\forall n\ge0)$ ثم حدد نهاية المتتالية $(I_n)_{n\ge0}$.

III- لكل عدد حقيقي x من المجال $J=[0,1[$ و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع :

$$F_0(x)=\int_0^x f(t)dt \quad و \quad F_n(x)=\int_0^x t^n f(t)dt \quad و \quad F(x)=\int_0^x \frac{f(t)}{1-t}dt \quad و \quad S_n(x)=\sum_{k=0}^{k=n} F_k(x)$$

1 1) بين أن: $F(x)-S_n(x)=\int_0^x \dfrac{t^{n+1}f(t)}{(1-t)}dt \quad (\forall x\in J)\quad (\forall n\in\mathbb{N})$

2) أ- بين أن الدالة : $x \to (1-x)(1-\ln(1-x))$ تناقصية قطعا على المجال J	0.5
ب- استنتج أن الدالة : $t \to \dfrac{f(t)}{1-t}$ تزايدية قطعا على المجال $[0,x]$ مهما يكن x من المجال J	0.5
3) أ- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall x \in J) :\quad 0 \le F(x) - S_n(x) \le \dfrac{1}{n+2}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$	1
ب- استنتج أنه مهما يكن العدد x من المجال J لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = F(x)$	0.5
4) أ- حدد $F(x)$ من أجل $x \in J$	0.5
ب- حدد النهاية: $\lim\limits_{x\to1^-} F(x)$	0.25

تصحيح موضوع مادة الرياضيات ، شعبة العلوم الرياضية ، الإمتحان الوطني دورة يوليوز 2010

تقديـــم: ذ.العربي الوظيفي

ثانوية ابن تومرت مراكش

==

التمريـــن 1:

1.نبين أن E جزء مستقر في $(M_3(R),\times)$.

ليكن M و N عنصرين من E ،

إذن يوجد عددان حقيقيان x و y حيث $M=M(x)$ و $N=M(y)$.

لدينا : $M(x)\times M(y)=\begin{pmatrix}1&1&0\\x&1&0\\x^2&2x&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\y&1&0\\y^2&2y&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\x+y&1&0\\(x+y)^2&2(x+y)&1\end{pmatrix}$$

$$=M(x+y)$$

إذن لكل M و N من E : $M\times N\in E$

ومنه $\boxed{\text{E جزء مستقر في } (M_3(R),\times).}$

2.أ. نبين أن φ تشاكل تقابلي من $(R,+)$ نحو $(E,\times)$.

. ليكن x و y من R . لدينا :

$$\varphi(x+y)=M(x+y)=M(x)\times M(y)=\varphi(x)\times\varphi(y)$$

إذن لكل x و y من R لدينا : $\varphi(x+y)=\varphi(x)\times\varphi(y)$.

ومنه : φ تشاكل من $(R,+)$ نحو $(E,\times)$.

. لكل عنصر M من E يوجد عدد حقيقي x حيث $M=M(x)$ وذلك حسب تعريف M.

ومنه φ تطبيق شمولي من R نحو E .

. ليكن x و y من R ، لدينا

$$\varphi(x)=\varphi(y)\Rightarrow M(x)=M(y)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=y\\x^2=y^2\\2x=2y\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=y$$

إذن لكل x و y من R حيث $\varphi(x)=\varphi(y)$ لدينا $x=y$.

ومنه φ تطبيق تبايني من R نحو E .

وعليه فإن φ تشاكل تقابلي من $(R,+)$ نحو $(E,\times)$.

2.ب.نستنتج أن $(E,\times)$ زمرة تبادلية :

نعلم أن $(R,+)$ زمرة تبادلية وحيث أن φ تشاكل تقابلي من $(R,+)$ نحو $(E,\times)$ فإن $(E,\times)$ زمرة تبادلية .

2.ج.نحدد مقلوب المصفوفة $M(x)$ حيث x من R :

ليكن x عددا حقيقيا . مماثل x في $(R,+)$ هو $(-x)$.

بما أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbf{R},+)$ نحو $(\mathbf{E},\times)$ فإن مماثل $\varphi(x)$ في $(\mathbf{E},\times)$ هو $\varphi(-x)$.
ومنه

مقلوب المصفوفة $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ هو المصفوفة $\mathbf{M}(-\mathbf{x})$.

2.د.نحل في المجموعة E المعادلة $A^5.X=B$ حيث $A=M(2)$ و $B=M(12)$ و $A^5=A\times A\times A\times A\times A$:

ليكن X عنصرا من E .
إذن $X=M(x)$ حيث x عنصر من R .
بما أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbf{R},+)$ نحو $(\mathbf{E},\times)$ فإن φ^{-1} تشاكل تقابلي من $(\mathbf{E},\times)$ نحو $(\mathbf{R},+)$.
ولدينا لكل x من R : $\varphi^{-1}(M(x))=x$. إذن :

ومنه :

مجموعة حلول المعادلة هي $S=\{M(2)\}$

3.بين أن المجموعة $F=\{M(\ln x)/\ x\in R_+^*\}$ زمرة جزئية للزمرة $(E,+)$.

. العنصر المحايد في $(\mathbf{R},+)$ هو العدد الحقيقي 0 .
بما أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbf{R},+)$ نحو $(\mathbf{E},\times)$ فإن العنصر المحايد في $(\mathbf{E},\times)$ هو $\varphi(0)$ أي المصفوفة $\mathbf{M}(0)$.
ولدينا $M(0)=M(\ln 1)$ والعدد 1 عنصر من R_+^* إذن $M(0)\in F$ إذن F غير فارغة .
. ليكن a و b عنصرين من F .
إذن: $a=M(\ln x)$ و $b=M(\ln y)$ حيث x و y عنصران من $]0;+\infty[$.
مقلوب المصفوفة b *هو المصفوفة* $b^{-1}=M(-\ln y)$.

لدينا : $a\times b^{-1}=M(\ln x)\times M(-\ln y)=M(\ln x-\ln y)=M\left(\ln\frac{x}{y}\right)$

وحيث أن $\frac{x}{y}$ عنصر من $]0;+\infty[$ فإن $M\left(\ln\frac{x}{y}\right)$ عنصر من F .
وعليه فإن

F زمرة جزئية للزمرة $(\mathbf{E},+)$.

التمريــــن 2:

1.أ.نتحقق أن العدد العقدي $a=1+i(2-\sqrt{3})$ حل للمعادلة $z^2-4iz-2+2i\sqrt{3}=0$:

تعويض ثم تبسيط ...

1.ب.نستنتج الحل الثاني b للمعادلة (E) :

نعلم أن مجموع الحلين هو : $a+b=4i$. إذن : $b=4i-a$
ومنه

الحل الثاني هو $b=-1+i(2+\sqrt{3})$.

2.أ.نبين أن $a^2=4(2-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$:

لدينا : $a^2=(1+i(2-\sqrt{3}))^2=-6+4\sqrt{3}+4i-2i\sqrt{3}=4(2-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$
ومنه

$$a^2=4(2-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$$

2.ب.لنستنتج شكلا مثلثيا للعدد a :

لدينا $a^2=4\left(2-\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$ إذن : العدد a جذر مربع للعدد $4\left(2-\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$.

ومنه : $a=2\sqrt{2-\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{12}}$ أو $a=-2\sqrt{2-\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{12}}$

وحيث أن الجزئين الحقيقي والتخيلي للعدد a موجبان فإن $a=2\sqrt{2-\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

3.أ.لنحدد لحق مركز الدائرة :

$[AB]$ قطر في الدائرة (Γ) . إذن لحق مركز الدائرة (Γ) هو $\omega=\frac{a+b}{2}$

ومنه

لحق مركز الدائرة هو $\omega=2i$.

3.ب.بين أن O و C نقطتان من (Γ) :

شعاع الدائرة (Γ) هو $R=\frac{|b-a|}{2}=\frac{\left|2-2i\sqrt{3}\right|}{2}=2$

بما أن $\Omega C=|c-2i|=\left|2e^{i\frac{\pi}{7}}\right|=2$ فإن $C\in(\Gamma)$.

بما أن $\Omega O=|\omega|=|2i|=2$ فإن $O\in(\Gamma)$.

3.ج.نبين أن العدد العقدي $\frac{c-a}{c-b}$ تخيلي صرف :

بما أن C تنتمي إلى الدائرة التي أحد أقطارها $[AB]$ وتخالف النقطتين A و B فإن المثلث ABC قائم الزاوية في C

ومنه قياس للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$ هو عمدة لعدد عقدي تخيلي صرف .

وعليه فإن العدد العقدي $\frac{c-a}{c-b}$ تخيلي صرف .

التمريـــن 3:

أ.نحدد قيم X :

نسحب عشوائيا الكرات واحدة تلو الأخرى ونقف حالما تظهر أول كرة بيضاء .

ليكن X عدد الكرات المسحوبة .قيم X هي : 1 ، 2 و 3 .

ب.نحسب احتمال $p(X=1)$:

الحدث $(X=1)$ هو الحصول على كرة بيضاء في المرة الأولى :

$$p(X=1)=\frac{card(X=1)}{card\Omega}=\frac{A_{10}^{1}}{A_{12}^{1}}=\frac{5}{6}$$

ج. نبين أن $p(X=2)=\frac{5}{33}$:

الحدث $(X=2)$ هو الحصول على كرة حمراء في المرة الأولى وكرة بيضاء في المرة الثانية:

$$p(X=2)=\frac{card(X=2)}{card\Omega}=\frac{A_{2}^{1}A_{10}^{1}}{A_{12}^{2}}=\frac{5}{33}$$

د.1.نحسب احتمال الحدث $(X=3)$:

الحدث $(X=3)$ هو الحصول على كرة حمراء في المرة الأولى والثانية وكرة بيضاء في المرة الثالثة:

$$p(X=3)=\frac{card(X=3)}{card\Omega}=\frac{A_{2}^{2}.A_{10}^{1}}{A_{12}^{3}}=\frac{2\times10}{12\times11\times10}=\frac{1}{66}$$