الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2010

الموضوع

| | | | |
|---|---|---|---|
| المـــــادة: | الرياضيات NS24 | المعامل: | 9 |
| الشعـــب(ة) أو المسلك : | شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) | مدة الإنجاز: | 4 |

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع (4) ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية....................(3.5ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية......................(3.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالحسابيات..........................(3ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل............................(6.25ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.........................(3,75ن)

**لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة القابلة للبرمجة**

**لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير**

**<u>التمرين الأول</u>:( 3.5 نقط)   الجزءان I و II مستقلان فيما بينهما.**

**I**− نزود المجموعة $I=]0,+\infty[$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي:

$$\left(\forall(a,b)\in I\times I\right)\quad a*b=e^{\ln(a)\cdot\ln(b)}$$

1) بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي في $I$ . 0.5

2) بين أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا $\varepsilon$ في $I$ يتم تحديده. 0.25

3)أ− بين أن $\left(I\setminus\{1\},*\right)$ زمرة تبادلية. ($I\setminus\{1\}$ هي المجموعة $I$ محرومة من 1) 0.75

ب− بين أن $]1,+\infty[$ زمرة جزئية للزمرة $\left(I\setminus\{1\},*\right)$ . 0.25

4) نزود $I$ بقانون التركيب الداخلي $\times$ ($\times$ هو الضرب في $\mathbb{R}$)

أ− بين أن القانون $*$ توزيعي بالنسبة للقانون $\times$ 0.25

ب− بين أن $(I,\times,*)$ جسم تبادلي. 0.5

**II**− نعتبر المصفوفة : $A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&-1&2\\-2&-2&0\end{pmatrix}$

1) أحسب $A^2$ و $A^3$ . 0.5

2) استنتج أن المصفوفة $A$ لا تقبل مقلوبا . 0.5

---

**<u>التمرين الثاني</u>:( 3.5 نقط)**

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ .

1) أ− حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي : $3+4i$ 0.25

ب− حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E):4z^2-10iz-7-i=0$ 0.5

2) ليكن $a$ و $b$ حلي المعادلة $(E)$ حيث: $\operatorname{Re}(a)<0$ والنقطتين $A$ و $B$ صورتي $a$ و $b$ على التوالي.

أ− تحقق أن: $\dfrac{b}{a}=1-i$ 0.25

ب− استنتج أن المثلث $AOB$ متساوي الساقين و قائم الزاوية في $A$ . 0.75

3) لتكن $C$ نقطة لحقها $c$ وتخالف النقطة $A$ ولتكن $D$ صورة النقطة $B$ بالدوران الذي مركزه $C$ وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$ ولتكن $L$ صورة النقطة $D$ بالإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{AO}$ .

أ− حدد بدلالة $c$ العدد العقدي $d$ لحق النقطة $D$ . 0.5

ب− حدد بدلالة $c$ العدد العقدي $\ell$ لحق النقطة $L$ . 0.5

ج− حدد الكتابة الجبرية للعدد العقدي $\dfrac{\ell-c}{a-c}$ ثم استنتج طبيعة المثلث $ACL$ . 0.75

**<u>التمرين الثالث</u>:( 3 نقط)**

| | |
|---|---|
| 1) حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية $m$ بحيث: $m^2+1\equiv 0 \quad [5]$ | 1 |
| 2) ليكن $p$ عددا أوليا بحيث : $p=3+4k$ مع $k$ عدد صحيح طبيعي. | |
| و ليكن $n$ عددا صحيحا طبيعيا بحيث: $n^2+1\equiv 0\,[p]$ | |
| أ- تحقق أن: $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv -1\,[p]$ | 0.25 |
| ب- بين أن $n$ و $p$ أوليان فيما بينهما. | 0.5 |
| ج- استنتج أن: $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv 1\,[p]$ | 0.75 |
| د- استنتج مما سبق أنه لا يوجد عدد صحيح طبيعي $n$ يحقق: $n^2+1\equiv 0\,[p]$ | 0.5 |

**<u>التمرين الرابع</u>:( 6.25 نقط)**

| | |
|---|---|
| **I**- نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بما يلي: $f(x)=4xe^{-x^2}$ | |
| و ليكن $(C)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ . | |
| 1) أحسب نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ | 0.5 |
| 2) أدرس تغيرات الدالة $f$ على المجال $[0;+\infty[$ ثم ضع جدول تغيراتها . | 0.75 |
| 3) حدد معادلة نصف المماس للمنحنى $(C)$ في أصل المعلم ثم أنشئ $(C)$. | 0.75 |
| (نأخذ $\lVert\vec{i}\rVert=\lVert\vec{j}\rVert=2cm$ و نقبل أن النقطة التي أفصولها $\sqrt{\frac{3}{2}}$ نقطة انعطاف للمنحنى $(C)$) | |
| 4)أحسب التكامل $a=\int_0^1 f(x)dx$ ثم استنتج بالسنتمتر المربع مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى $(C)$ ومحوري المعلم و المستقيم الذي معادلته $x=1$ | 0.5 |
| **II- ليكن $n$ عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2 .** | |
| نعتبر الدالة العددية $f_n$ المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بما يلي : $f_n(x)=4x^ne^{-x^2}$ | |
| 1) أ- بين أن: $e^{-x^2}<e^{-x} \quad (\forall x>1)$ | 0.25 |
| ب- استنتج نهاية الدالة $f_n$ عندما تؤول $x$ إلى $+\infty$. | 0.25 |
| 2) ادرس تغيرات الدالة $f_n$ على المجال $[0;+\infty[$ ثم ضع جدول تغيراتها . | 0.75 |
| 3) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد $u_n$ من المجال $]0,1[$ بحيث : $f_n(u_n)=1$ | 0.5 |
| 4) أ- تحقق أن : $f_{n+1}(u_n)=u_n \quad (\forall n\geq 2)$ | 0.25 |
| ب- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ تزايدية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة . | 0.75 |

5) نضع : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

أ- بين أن : $0<\ell\leq 1$ — 0.25

ب- بين أن : $-\dfrac{\ln(4)}{n}<\ln(u_n)<\dfrac{1}{n}-\dfrac{\ln(4)}{n} \qquad (\forall n\geq 2)$ — 0.25

ج- استنتج أن : $\ell=1$ — 0.5

---

**التمرين الخامس:( 3.75 نقط)**

نعتبر الدالة العددية $F$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $F(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$

1) بين أن الدالة $F$ فردية . — 0.25

2) لكل $x$ من المجال $]0,+\infty[$ نضع : $\varphi(x)=\displaystyle\int_1^{x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$

أ- تحقق أن: $F(x)=\varphi(2x)-\varphi(x) \quad (\forall x>0)$ — 0.25

ب- بين أن الدالة $F$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ثم أحسب $F'(x)$ من أجل $x>0$ — 0.5

ج- استنتج منحى تغيرات الدالة $F$ على المجال $]0,+\infty[$ . — 0.5

3) أ- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية ، بين أن: $F(x)=\dfrac{x}{\ln(1+c^2)}$ : $(\forall x>0)\ (\exists c\in\, ]x,2x[)$ — 0.5

ب- استنتج أن: $\dfrac{x}{\ln(1+4x^2)}<F(x)<\dfrac{x}{\ln(1+x^2)} \quad : \quad (\forall x>0)$ — 0.25

ج-حدد النهايات : $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$ . — 0.75

د- تحقق أن : $F\left(\sqrt{e-1}\right)<\sqrt{e-1}$ و $F\left(\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}\right)>\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}$ — 0.75

ثم استنتج أن المعادلة $F(x)=x$ تقبل حلا وحيدا في $]0,+\infty[$ .

**التمرين الأول : ( 3,3 ن )**

■ (I) ①

لنبين أن $*$ قانون تبادلي في المجموعة $I$ .

ليكن $a$ و $b$ عنصرين من $I$ .

لدينا :
$$a*b = e^{\ln(a).\ln(b)} = e^{\ln(b).\ln(a)} = b*a$$

و منه : $a*b = b*a$ يعني : $*$ قانون تبادلي في $I$ .

لنبين أن $*$ قانون تجميعي في المجموعة $I$ .

ليكن $a$ و $b$ و $c$ ثلاث عناصر من $I$ .

$$\begin{aligned} a*(b*c) &= e^{\ln(a).\ln(b*c)} \\ &= e^{\ln(a).\ln\left(e^{\ln(b).\ln(c)}\right)} \\ &= e^{\ln(a).\ln(b).\ln(c)} \\ &= e^{\ln\left(e^{\ln(a).\ln(b)}\right).\ln(c)} \\ &= e^{\ln(a*b).\ln(c)} \\ &= (a*b)*c \end{aligned}$$

إذن القانون $*$ تجميعي في المجموعة $I$ .

■ ②

ليكن $\varepsilon$ العنصر المحايد القانون $*$ في المجموعة $I$

و هذا يعني : $a*\varepsilon = \varepsilon*a = a \;;\; (\forall a\epsilon I)$

لتحديد قيمة $\varepsilon$ ننطلق من إحدى المتساويتين $a*\varepsilon = a$ أو $\varepsilon*a = a$

الكتابة : $a*\varepsilon = a$ .

تعني : $e^{\ln(a).\ln(\varepsilon)} = a$

تعني : $\ln(a).\ln(\varepsilon) = \ln(a)$

تعني : $\ln(\varepsilon) = \dfrac{\ln(a)}{\ln(a)} = 1$

تعني : $\varepsilon = e$

نتأكد من أن ينتمي إلى المجال $]0;+\infty[$

بالفعل $e \approx 2,72$ أكبر قطعا من $0$

إذن : $e\epsilon I$

و منه القانون يقبل عنصرا محايدا و هو العدد $e$

■ ③ أ

ليكن $a$ و $b$ عنصرين من المجموعة $I \setminus \{1\}$ .

هذا يعني أن $a \neq 1$ و $b \neq 1$

و منه : $\ln(b) \neq 0$ و $\ln(a) \neq 0$

يعني : $\ln(a).\ln(b) \neq 0$

و منه : $e^{\ln(a).\ln(b)} \neq 1$

نستنتج أن : $e^{\ln(a).\ln(b)} > 0$ و $e^{\ln(a).\ln(b)} \neq 1$

و هذا يعني بكل بساطة أن : $e^{\ln(a).\ln(b)} \epsilon\; I \setminus \{1\}$

أي : $a*b \;\epsilon\; I \setminus \{1\}$

و منه $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة $I \setminus \{1\}$

تبادلية و تجميعية القانون $*$ في المجموعة $I \setminus \{1\}$
نستنتجه من المجموعة $I$ لأن $I \setminus \{1\}$ جزء من $I$

بما أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي في $I$ فإن $*$ تبادلي و تجميعي
كذلك في المجموعة $I \setminus \{1\}$ لأن $I \setminus \{1\} \subset I$

لدينا $e$ هو العنصر المحايد للقانون $*$ في المجموعة $I$

إذن $e$ هو العنصر المحايد للقانون $*$ في المجموعة $I \setminus \{1\}$
لأن $e \neq 1$ أي $e\,\epsilon\, I \setminus \{1\}$

ليكن $a$ عنصرا من المجموعة $I \setminus \{1\}$

$x$ مقلوب للعنصر $a$ في المجموعة $I \setminus \{1\}$

يعني : $a*x = x*a = e$

ننطلق من الكتابة $a*x = e$

هذا يعني أن $e^{\ln(a).\ln(x)} = e$ و منه : $\ln(a).\ln(x) = 1$

أي : $\ln(x) = \dfrac{1}{\ln(a)}$ يعني : $x = e^{\frac{1}{\ln(a)}}$

بما أن : $a\,\epsilon\, I \setminus \{1\}$ فإن $a \neq 1$

و هذا يعني أن : $\ln(a) \neq 0$

و منه : $\dfrac{1}{\ln(a)} \neq 0$ يعني : $e^{\frac{1}{\ln(a)}} \neq 1$

أي : $e^{\frac{1}{\ln(a)}}\,\epsilon\, I \setminus \{1\}$

نستنتج أن كل عنصر $a$ من المجموعة $I \setminus \{1\}$ يقبل
مقلوبا $e^{\frac{1}{\ln(a)}}$ من نفس المجموعة $I \setminus \{1\}$

<u>خلاصة</u> : لقد تمكنا من أن نبرهن على أن $*$ قانون تركيب داخلي في
المجموعة $I \setminus \{1\}$ و له عنصر محايد $e$ و كل عنصر $a$ يقبل
مقلوبا $e^{\frac{1}{\ln(a)}}$ في المجموعة $I \setminus \{1\}$

و بالتالي $(I \setminus \{1\}, *)$ زمرة تبادلية.

■ ③ ب

أولا ، نلاحظ أن $]1;+\infty[ \subset I \setminus \{1\}$

لأن : $I \setminus \{1\} = ]0;1[ \cup ]1;+\infty[$

و كذلك : $]1;+\infty[ \neq \emptyset$

و هذا يعني أن $]1;+\infty[$ جزء غير منعدم من المجموعة $I \setminus \{1\}$

يكفي الآن أن نبرهن على نه إذا كان $a$ و $b$ عنصرين من $]1,+\infty[$

فإن : $a * b' \epsilon ]1,+\infty[$ بحيث $b'$ هو مقلوب $b$ في $I \setminus \{1\}$

ننطلق من الكتابة :

$$\begin{aligned} a * b' &= a * \left(e^{\frac{1}{\ln b}}\right) \\ &= e^{\ln(a).\ln\left(e^{\frac{1}{\ln b}}\right)} \\ &= e^{\ln(a).\frac{1}{\ln(b)}} \\ &= e^{\frac{\ln(a)}{\ln(b)}} \end{aligned}$$

من جهة أخرى لدينا : $a\epsilon]1,+\infty[$ و $b\epsilon]1,+\infty[$

يعني $b > 1$ و $a > 1$

يعني $\ln b > 0$ و $\ln a > 0$ يعني : $\dfrac{ln(a)}{ln(b)} > 0$

إذن : $e^{\frac{\ln(a)}{\ln(b)}} \epsilon\ ]1,+\infty[$ و منه $e^{\frac{\ln(a)}{\ln(b)}} > 1$

يعني : $a * b'\epsilon]1,+\infty[$

الوضعية التي نتوفر عليها الآن هي $\boxed{(I \setminus \{1\},*) \text{ زمرة تبادلية .}}$

$]1,+\infty[$ جزء غير منعدم من المجموعة $I \setminus \{1\}$

$(\forall(a,b)\epsilon]1;+\infty[)\ ;\ a * b'\epsilon\ ]1;+\infty[$

نستنتج من هذه الوضعية أن $(]1,+\infty[,*)$ زمرة جزئية للزمرة $(I \setminus \{1\},*)$ .

■ ④ أ

ليكن $a$ و $b$ و $c$ ثلاث عناصر من المجموعة $I$ .

يكون $*$ توزيعيا بالنسبة للقانون $\times$ إذا كان :

$$\begin{cases} a * (b \times c) = (a * b) \times (a * c) \\ (a \times b) * c = (a * c) \times (b * c) \end{cases}$$

لدينا :

$$\begin{aligned} a * (b \times c) &= e^{\ln(a).\ln(b\times c)} \\ &= e^{\ln(a).(\ln(b)+\ln(c))} \\ &= e^{\ln(a).\ln(b)+\ln(a)\ln(c)} \\ &= e^{\ln(a).\ln(b)} \times e^{\ln(a).\ln(c)} \\ &= (a * b) \times (a * c) \end{aligned}$$

و بما أن القانون $*$ تبادلي نستنتج المتساوية الأخرى

و بالتالي : $\boxed{\text{القانون } * \text{ توزيعي بالنسبة للقانون } \times}$

■ ④ ب

لدينا $I$ جزء غير منعدم من $\mathbb{R}^*$

ليكن $x$ و $y$ عنصرين من $I$

إذن : $0 < x$ ز $0 < y$ . و منه : $\dfrac{x}{y} > 0$ أي : $x \times y^{-1} > 0$ .

إذن : $(x \times y^{-1})\ \epsilon\ I$

إذن $(I,\times)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R}^*,\times)$ .

و لدينا حسب السؤال ④ أ : $*$ توزيعي بالنسبة لـ $\times$ .

و لدينا كذلك : حسب السؤال ③ أ $\boxed{(I \setminus \{1\},*) \text{ زمرة تبادلية .}}$

$\boxed{\text{و بالتالي } (I,\times,*) \text{ جسم تبادلي .}}$

■ (II) ①

بعد الحساب سوف تحصل على النتائج التالية :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■ ②

نفترض أن $A$ تقبل مقلوبا $A^{-1}$ في المجموعة $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

إذن : $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$ .

بحيث : $\times$ هو ضرب المصفوفات و $I$ هي المصفوفة : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ننطلق من الكتابة $A \times A^{-1} = I$

نضرب طرفي هذه المتساوية في $A^2$ نحصل على : $A^3 \times A^{-1} = A^2$

إذن : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

و هذا تناقض واضح لأن : $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

و بالتالي المصفوفة $A$ لا تقبل مقلوبا في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

**<u>التمرين الثاني : ( 3,5 ن )</u>**

■ ① أ

ليكن العدد العقدي $x + iy$ جذرا مربعا للعدد العقدي : $3 + 4i$

هذا يعني أن : $(x + iy)^2 = 3 + 4i$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow\ x^2 - y^2 + i(2xy) = 3 + 4i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

من المعادلة الثانية نحصل على : $x^2 = \dfrac{4}{y^2}$

نعوض $x^2$ في المعادلة الأولى نجد : $\dfrac{4}{y^2} - y^2 = 3$

يعني : $\boxed{y^4 + 3y^2 - 4 = 0}$

نضع : $t = y^2$ نحصل على : $t^2 + 3t - 4 = 0$

هذه المعادلة تقبل الحلين $t_1 = 1$ و $t_2 = -4$

الحل $t_1$ يمدنا بـ $y = -1$ أو $y = 1$ .

والحل $t_2$ يمدنا بـ $y = -2i$ أو $y = 2i$ .

إذن المعادلة : $y^4 + 3y^2 - 4 = 0$ تقبل أربعة حلول. نعوض كل قيمة لـ $y$ في النظمة لإيجاد قيمة $x$ الموافقة.

إذا كان $y = 1$ فإن : $x = 2$

إذا كان $y = -1$ فإن : $x = -2$

إذا كان $y = 2$ فإن : $x = -i$

إذا كان $y = -2$ فإن : $x = i$

بعد ذلك نكتب الجذور المربعة التي حصلنا عليها و هي :

في الحالة الأولى : $x + iy = 2 + i$ .

في الحالة الثانية : $x + iy = -2 - i$ .

في الحالة الثالثة : $x + iy = -2 - i$ .

في الحالة الرابعة : $x + iy = 2 + i$ .

و بالتالي : $(3 + 4i)$ يقبل جذرين مربعين فقط و هما : $(2 + i)$ و $(-2 - i)$ .

■ ① ب

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E) : 4z^2 - 10iz - 7 - i = 0$ .

بعد حساب المميز $\Delta$ نجد : $\Delta = 4(3 + 4i)$ .

لدينا حسب السؤال ① أ : $(3 + 4i)$ يقبل جذرين مربعين فقط و هما : $(2 + i)$ و $(-2 - i)$ .

نختار $(2 + i)$ نحصل على : $\Delta = [2(2 + i)]^2$ .

و منه $(E)$ تقبل الحلين $a$ و $b$ كما يلي :

$$\boxed{a = i - \frac{1}{2}} \quad \text{و} \quad \boxed{b = \frac{3}{2}i + \frac{1}{2}}$$

عندما نختار الجذر المربع الثاني لـ $(3 + 4i)$ نحصل على نفس النتيجة.

■ ② أ

لدينا :

$$\begin{aligned} a(1-i) &= \left(i - \frac{1}{2}\right)(1 - i) \\ &= i + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \\ &= b \end{aligned}$$

■ ② ب

لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{0-a} &= -\frac{b}{a} + 1 \\ &= -(1-i) + 1 \\ &= i \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

إذن : $\dfrac{b-a}{0-a} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{AB}{AO} = 1 \\ \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB = AO \\ \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

و بالتالي المثلث $AOB$ متساوي الساقين و قائم الزاوية في النقطة $O$

■ ③ أ

لدينا : $B \xrightarrow{R_c\left(\frac{\pi}{2}\right)} D$

إذن حسب التعريف العقدي للدوران : $(d - c) = e^{i\frac{\pi}{2}}(b - c)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad d = c + i(b - c) \\ &\Leftrightarrow \quad d = c + ib - ic \\ &\Leftrightarrow \quad c(1-i) = d - ib \\ &\Leftrightarrow \quad c(1-i) = d - i\left(\frac{3}{2}i + \frac{1}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad c(1-i) = d + \frac{3}{2} - \frac{i}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad c = \left(\frac{1}{1-i}\right)d + \left(\frac{\frac{3}{2} - \frac{i}{2}}{1-i}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad c = \frac{1}{2}(1+i)d + \left(1 + \frac{i}{2}\right) \end{aligned}$$

■ ③ ب

لدينا : $D \xrightarrow{T_{\overrightarrow{AO}}} L$

إذن حسب تعريف الإزاحة : $\overrightarrow{DL} = \overrightarrow{AO}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad (\ell - d) = (0 - a) \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\ell + (i-1)c + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -a \\ &\Leftrightarrow \quad \ell + (i-1)c + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{1}{2} - i \\ &\Leftrightarrow \quad \ell = (1-i)c - \frac{i}{2} - 1 \end{aligned}$$

■ ③ ج

لدينا :
$$\frac{\ell-c}{a-c}=\frac{(1-i)c-1-\frac{i}{2}-c}{i-\frac{1}{2}-c}=\frac{-ic-1-\frac{i}{2}}{i-\frac{1}{2}-c}=\frac{i\left(-c+i-\frac{1}{2}\right)}{i-\frac{1}{2}-c}=i$$

إذن :
$$\frac{\ell-c}{a-c}=i=e^{\frac{i\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\frac{CL}{CA}=1\\ \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CL}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$$

و بالتالي المثلث $ALC$ متساوي الساقين و قائم الزاوية في النقطة $C$

**التمرين الثالث : ( 3,0 ن )**

■ ①

في البداية وجب التذكير بخاصيتين هامتين :

الخاصية الأولى : في $\mathbb{Z}$ ، إذا كان $a$ يقسم $b$ و $c$ فإنه يقسم كل تأليفة خطية لهما:$(ub+vc)$ .

بتعبير آخر : $\begin{cases}a\,/\,b\\ a\,/\,c\end{cases}\Longrightarrow(\forall u,v\in\mathbb{Z}):a/(ub+vc)$

الخاصية الثانية (un premier qui divise un produit)

كل عدد أولي يقسم جداء عددين فإنه بالضرورة يقسم أحدهما.

بتعبير آخر : $\begin{cases}p\in\mathbb{P}\\ p\,/\,ab\end{cases}\Longrightarrow(p/a)$ أو $(p\,/\,b)$

ننطلق إذن من الكتابة : $m^2+1\equiv0[5]$

$$\Leftrightarrow\quad 5\,/\,(m^2+1)$$

و نعلم أن $5\,/\,(-5)$

إذن حسب الخاصية الأولى : $5\,/\,(m^2+1-5)$

يعني : $5\,/\,(m-2)(m+2)$

بما أن 5 عدد أولي فإنه حسب الخاصية الثانية :

$5/(m-2)$ أو $5\,/\,(m+2)$

و منه حسب الخاصية الأولى :

$5/(m-2)$ أو $5\,/\,(m+2-5)$

يعني : $m\equiv2[5]$ أو $m\equiv3[5]$

في المجموعة $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ نكتب $m\in\{\overline{2},\overline{3}\}$

■ ② أ

ليكن $p$ عددا أوليا .و $k$ و $n$ عددين صحيحين طبيعيين

ننطلق إذن من الكتابة : $n^2+1\equiv0[p]$

$$\Leftrightarrow\quad n^2\equiv-1[p]$$
$$\Leftrightarrow\quad (n^2)^{(\text{عدد فردي})}\equiv(-1)^{(\text{عدد فردي})}[p]$$
$$\Leftrightarrow\quad (n^2)^{(2k+1)}\equiv-1[p]$$

■ ② ب

لدينا حسب السؤال ⓐ $(n^2)^{(2k+1)}\equiv-1[p]$

$$\Leftrightarrow\quad(\exists u\in\mathbb{Z})\;:\;(n^2)^{(2k+1)}+1=pu$$

$$\Leftrightarrow\quad(\exists u\in\mathbb{Z})\;:\;pu+n\underbrace{\left(-n^{4k}\right)}_{v}=1$$

$$\Leftrightarrow\quad(\exists\,u,v\in\mathbb{Z})\;:\;pu+nv=1$$

و بالتالي حسب Bezout : $n\wedge p=1$

■ ② ج

لدينا $p$ عدد أولي .و $n\wedge p=1$

إذن حسب مبرهنة Fermat : $n^{p-1}\equiv1[p]$

و نعلم أن $p=4k+3$ إذن : $(n^2)^{2k+1}\equiv1[p]$

■ ② د

باستعمال البرهان بالخلف نفترض وجود العدد $n$ بحيث: $n^2+1\equiv0[p]$

إذن : $\begin{cases}(n^2)^{2k+1}\equiv-1[p]\\ (n^2)^{2k+1}\equiv1[p]\end{cases}$

و منه : $1\equiv-1[p]$ أي : $p\,/\,2$

بما أن $p$ عدد أولي و يقسم العدد الأولي 2 فإن : $p=2$

و هذا مستحيل لأنه لا وجود لعدد صحيح طبيعي $k$ يحقق $4k+3=2$

و بالتالي لا وجود لعدد صحيح طبيعي $n$ يحقق : $n^2+1\equiv0[p]$

**التمرين الرابع : ( 6,25 ن )**

**1**

نعلم أن : $\frac{e^x}{x} \xrightarrow{+\infty} +\infty$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} 4xe^{-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x}\right)\times\frac{1}{\left(\frac{e^{x^2}}{x^2}\right)}$

نضع:

إذن النهاية تصبح : $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{4}{\sqrt{t}}\right)\times\frac{1}{\left(\frac{e^t}{t}\right)} = 0$

**2**

لدينا : $f'(x) = 4e^{-x^2} + (4x)(-2xe^{-x^2})$
$= (1-2x^2)(4e^{-x^2})$

بما أن : $4e^{-x^2} > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $1-2x^2$

إذا كان : $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن $f'(x) = 0$ .

إذا كان : $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن $f'(x) < 0$ .

إذا كان : $x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن $f'(x) > 0$ .

و نلخص النتائج في الجدول التالي :

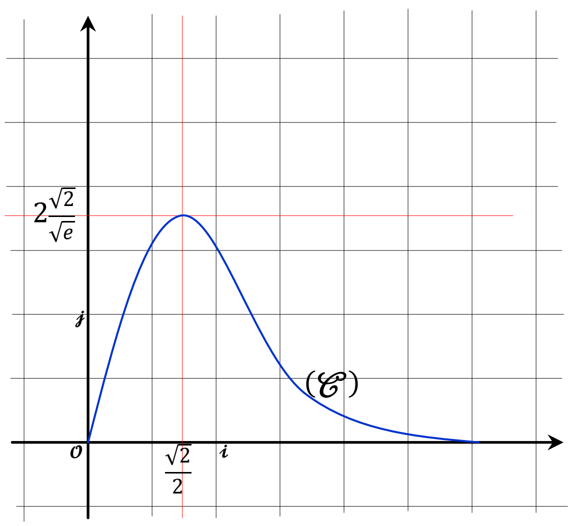
| $x$ | $0$ | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$ | $\searrow$ | $0$ |

**3**

معادلة المماس لـ $(\mathscr{C})$ في النقطة $O$ هي :

$$\boxed{(\Delta) : y = f'(0)(x-0) + f(0)}$$

يعني : $(\Delta) : y = 4x$ مع $x \geq 0$




**4**

لاحظ أن : $\left(e^{-x^2}\right)' = -2xe^{-x^2}$

يعني : $-2\left(e^{-x^2}\right)' = 4xe^{-x^2}$

إذن : $\int_0^1 4xe^{-x^2}dx = -2\left[e^{-x^2}\right]_0^1$
$= -2(e^{-1}-1)$
$= 2(1-e^{-1}) = a$

مساحة الحيز $S$ تقاس باستعمال التكامل التالي :

$$\boxed{S = \int_0^1 f(x)dx}$$

بما أن : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$ فإن العدد $2(1-e^{-1})$ يعني في الواقع $2unités(1unité - e^{-1}unité)$

في هذا التمرين لدينا : $1unité = 2cm$ إذن $\boxed{a = 8(1-e^{-1})\ cm^2}$

**الجزء الثاني**

**1 أ**

ليكن $x$ عددا حقيقيا أكبر من أو يساوي 1

لدينا : $x > 1 \Rightarrow x^2 > x$
$\Rightarrow -x^2 < -x$
$\Rightarrow e^{-x^2} < e^{-x}$

لأن الدالة $x \to e^x$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

**1 ب**

لدينا : $(\forall x > 1) :\ 0 < e^{-x^2} < e^{-x}$

إذن : $(\forall x > 1) :\ 0 < 4x^n e^{-x^2} < 4x^n e^{-x}$

من جهة أخرى لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} x^n e^{\frac{-nx}{n}} = \lim_{x\to+\infty}\left(xe^{\frac{-x}{n}}\right)^n$$
$$= \lim_{\substack{u\to-\infty \\ u=-\frac{x}{n}}} (-n\underbrace{ue^u}_{\xrightarrow{-\infty} 0})^n = 0$$

بنفس الطريقة نبين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x^2} = 0$

إذن : $(\forall x > 1) :\ \underbrace{0}_{\xrightarrow{+\infty} 0} < \underbrace{4x^n e^{-x^2}}_{\xrightarrow{+\infty} 0} < \underbrace{4x^n e^{-x}}_{\xrightarrow{+\infty} 0}$

و منه : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0}$

■ ②

لدينا : $f_n'(x) = 4e^{-x^2}x^{n-1}(n-2x^2)$

بما أن $4e^{-x^2}x^{n-1} > 0$ فإن إشارة $f_n'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $n-2x^2$

إذا كان : $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$ فإن $f_n'(x) = 0$ .

إذا كان : $x > \sqrt{\frac{n}{2}}$ فإن $f_n'(x) < 0$ .

إذا كان : $x < \sqrt{\frac{n}{2}}$ فإن $f_n'(x) > 0$ .

و لدينا : $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = \lim\limits_{x\to 0} 4x^n e^{-x^2} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f_n(x) = 0$

و نلخص النتائج في الجدول التالي :

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{\frac{n}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_n'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_n$ | $0$ | $\nearrow$ | $f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)$ | $\searrow$ | $0$ |

■ ③

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة $f_n$

$f_n$ دالة متصلة و تزايدية قطعا على المجال $\left[0,\sqrt{\frac{n}{2}}\right]$

لنبين أن $[0,1] \subset \left[0,\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right]$

ليكن $x$ عنصرا من $[0,1]$ إذن $0 \le x \le 1$

و منه : $0 \le x^2 \le 1$

نعلم أن : $0 \le 2 \le n$

نضرب هاتين المتفاوتتين طرفا بطرف نحصل على : $0 \le 2x^2 \le 1$

إذن : $0 \le x \le \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$ و منه نستنتج أن : $[0,1] \subset \left[0,\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right]$

بما أن $f_n$ متصلة و تزايدية قطعا على $\left[0,\frac{\sqrt{n}}{2}\right]$ و لدينا $[0,1] \subset \left[0,\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right]$

إذن : $f_n$ متصلة و تزايدية قطعا على $[0,1]$

و بالتالي : $f_n$ تقابل من $[0,1]$ نحو صورته $\left[0,\frac{4}{e}\right]$

نضع : $g_n(x) = f_n(x) - 1$

لدينا : $g_n(0).g_n(1) = (f_n(0)-1)(f_n(1)-1)$

$= (0-1)\left(\frac{4}{e}-1\right)$

$\approx -0,47 < 0$

جميع النتائج المحصل عليها لحد الآن تخول لنا استعمال مبرهنة القيم الوسيطية

و بالتالي : يوجد عدد حقيقي وحيد $u_n$ محصور بين 0 و 1

و يحقق : $g_n(u_n) = 0$

أو بتعبير آخر : المعادلة $f_n(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا $u_n$ من المجال $]0,1[$

■ ④ أ

لدينا : $f_n(x) = 4x^n e^{-x^2}$

$\Rightarrow f_{n+1}(x) = 4x^{n+1}e^{-x^2}$

$\Rightarrow f_{n+1}(x) = x\left(4x^n e^{-x^2}\right)$

$\Rightarrow f_{n+1}(x) = x f_n(x)$

و منه : $\boxed{f_{n+1}(u_n) = u_n.f_n(u_n)}$

لدينا حسب السؤال ③ $f_n(u_n) = 1$

إذن : $\boxed{f_{n+1}(u_n) = u_n.1 = u_n}$

■ ④ ب

لدينا $f_n$ دالة متصلة و تزايدية قطعا على $[0,1]$ .

و لدينا كذلك : $u_n < 1$ لأن $u_n \epsilon ]0,1[$

إذن : $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$

لأن : $f_{n+1}(u_n) = u_n$ حسب السؤال ④ أ

و : $f_{n+1}(u_{n+1}) = 1$ حسب السؤال ③

و بما أن $f_{n+1}$ تقابل ( متصلة و تزايدية قطعا على $[0,1]$ )

فإن : $u_n < u_{n+1}$

و منه $(u_n)_n$ متتالية تزايدية . و بما أنها مكبورة بالعدد 1 ( $u_n < 1$ ) فإنها متقاربة

■ ⑤ أ

لدينا : $0 < u_n < 1$ إذن : $0 < \lim_\infty(u_n) \le 1$

و منه : $0 < \ell \le 1$

المتتالية $(u_n)_n$ مكبورة و تزايدية إذن يستحيل أن تكون نهايتها الصفر و هذا ما يبرر الكتابة $0 < \ell \le 1$ . و هذه النهاية يمكن أن تساوي 1 الذي ليس قيمة من قيمها لأنها تزايدية . و في هذه الحالة نقول بأن العدد 1 محد علوي للمجموعة $\{u_n , n \ge 2\}$ .

■ ⑤ ب

لدينا : $\begin{cases} 0 < u_n < 1 \\ 0 < (u_n)^2 < 1 \end{cases}$

$\Rightarrow 1 < e^{(u_n)^2} < e$

نعلم أن : $f(u_n) = 1$

يعني : $4(u_n)^n e^{-(u_n)^2} = 1$

و منه : $e^{(u_n)^2} = 4(u_n)^n$

ننطلق من : $1 < e^{(u_n)^2} < e$

إذن : $1 < 4(u_n)^n < e$

نعلم أن الدالة $ln$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$ إذن :

$$0 < \ln(4(u_n)^n) < 1$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 < \ln(4) + n\ln(u_n) < 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{-\ln 4}{n} < \ln(u_n) < \frac{1}{n} - \frac{\ln 4}{n}$$

■ 5 ج

بما أن :

$$\boxed{\underbrace{\frac{-\ln 4}{n}}_{\xrightarrow{+\infty} 0} < \ln(u_n) < \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{\ln 4}{n}}_{\xrightarrow{+\infty} 0}}$$

إذن بالضرورة : $\lim\limits_{n\infty} \ln(u_n) = 0$

و منه : $\lim\limits_{n\infty}(u_n) = \lim\limits_{n\infty} e^{\ln(u_n)} = e^0 = 1$

و بالتالي : $\boxed{\ell = 1}$

**التمرين الخامس : ( 3,75 ن**

■ 1

لدينا : $F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$

نضع : $y = -t$ إذن $dy = -dt$

إذا كان : $t = -x$ فإن $y = x$ .

إذا كان : $t = -2x$ فإن $y = 2x$ .

$$F(-x) = \int_x^{2x} \frac{-1}{\ln(1+y^2)}dy$$
$$= -\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+y^2)}dy$$
$$= -F(x)$$

إذن : F دالة فردية .

■ 2 أ

ليكن : $x > 0$

لدينا : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$

$$= \int_x^1 \frac{1}{\ln(1+t^2)}dt + \int_1^{2x} \frac{1}{ln(1+t^2)}dt$$

$$= -\int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)}dt + \int_1^{2x} \frac{1}{ln(1+t^2)}dt$$
$$= -\varphi(x) + \varphi(2x)$$

■ 2 ب

لدينا : $F(x) = -\varphi(x) + \varphi(2x)$

الدالة $x \to \varphi(x)$ قابلة للإشتقاق .

لأن $\frac{1}{\ln(1+x^2)}$ دالة متصلة إذن تقبل دالة أصلية و هي $\varphi(x)$

و لدينا : $\varphi'(x) = \frac{1}{\ln(1+x^2)}$

و لدينا كذلك : $x \to \varphi(2x)$ دالة قابلة للإشتقاق لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق

و بالتالي $F$ قابلة للإشتقاق لأنها مجموع دالتين قابلتين للإشتقاق.

إذن : $F'(x) = -\varphi'(x) + 2\varphi'(2x)$

$$= \frac{-1}{ln(1+x^2)} + \frac{2}{ln(1+4x^2)}$$
$$= \frac{2\ln(1+x^2) - \ln(1+4x^2)}{\ln(1+4x^2)\ .\ln(1+x^2)}$$
$$= \frac{\ln[(1+x^2)^2] - \ln(1+4x^2)}{\ln(1+4x^2)\ .\ln(1+x^2)}$$
$$= \frac{\ln\left(\frac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2}\right)}{\ln(1+4x^2)\ .\ln(1+x^2)}$$

■ 2 ج

لدينا : $x > 0$

إذن : $1 + x^2 > 1$ و $1 + 4x^2 > 1$

و منه : $\ln(1+4x^2)\ .\ln(1+x^2) > 0$

و بالتالي إشارة $F'(x)$ تتعلق فقط بإشارة : $ln\left(\frac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2}\right)$

لنحل المعادلة : $ln\left(\frac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2} = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad x^4+2x^2+1 = 1+4x^2$$
$$\Leftrightarrow \quad x^4 - 2x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2(x^2-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ أو } x = \sqrt{2} \text{ أو } x = -\sqrt{2}$$

نحن بصدد دراسة تغيرات الدالة $F$ على المجال $]0,+\infty[$

إذن سوف نهتم بالحالة $x=\sqrt{2}$ فقط.

إذا كان $x=\sqrt{2}$ فإن $x^2(x^2-2)>0$

و منه : $$\frac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2}>1$$

يعني : $$ln\left(\frac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2}\right)>0$$

إذن : $$F'(x)>0$$

يعني $F$ تزايدية قطعا على $[\sqrt{2},+\infty[$ :

في الحالة الأخرى نجد أن $F$ تناقصية على المجال $]0,\sqrt{2}[$ .

■ 3 أ

ليكن $x>0$ إذن $2x>0$

و منه : $[x,2x]\subset\,]0,+\infty[$

و بما أن $\varphi$ قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ .

فإن $\varphi$ متصلة و قابلة للإشتقاق على : $]x,2x[$

و منه حسب مبرهنة التزايدات المنتهية :

$$(\exists c\epsilon]x,2x[) : \frac{\varphi(2x)-\varphi(x)}{2x-x}=\varphi'(c)$$

يعني : $$(\exists c\epsilon]x,2x[) : \varphi(2x)-\varphi(x)=x\varphi'(c)$$

يعني : $$\boxed{F(x)=\frac{x}{\ln(1+c^2)}}$$

■ 3 ب

لدينا حسب السؤال (أ) $0<x<c<2x$

$$\Rightarrow\ 0<x^2<c^2<4x^2$$

$$\Rightarrow\ 0<\ln(1+x^2)<\ln(1+c^2)<\ln(1+4x^2)$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{\ln(1+4x^2)}<\frac{1}{\ln(1+c^2)}<\frac{1}{\ln(1+x^2)}$$

$$\Rightarrow\ \frac{x}{\ln(1+4x^2)}<\frac{x}{\ln(1+c^2)}<\frac{x}{\ln(1+x^2)}$$

$$\Rightarrow\ \frac{x}{\ln(1+4x^2)}<F(x)<\frac{x}{\ln(1+x^2)}$$

■ 3 ج

لدينا حسب السؤال (ب)

$$\boxed{\frac{x}{\ln(1+4x^2)}<F(x)<\frac{x}{\ln(1+x^2)}}$$

و لدينا : $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(1+x^2)}=+\infty$$

يكفي أن نستعمل : $$\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0\right)$$

و لدينا كذلك: $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(1+4x^2)}=+\infty$$

إذن : $$\left(\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty\right)$$

و بنفس الطريقة و باستعمال النهاية : $$\left(\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty\right)$$

نجد : $\left(\lim_{x\to0^+}F(x)=+\infty\right)$ و $\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0\right)$

■ 3 د

لدينا حسب السؤال (ب) $F(x)<\frac{x}{\ln(1+x^2)}$

و لدينا : $\sqrt{e-1}\approx1{,}31>0$

إذن : $$F(\sqrt{e-1})<\frac{\sqrt{e-1}}{\ln(1+(e-1))}$$

يعني : $$\boxed{F(\sqrt{e-1})<\sqrt{e-1}}\quad(1)$$

و لدينا كذلك: $\frac{x}{\ln(1+4x^2)}<F(x)$ و $\frac{\sqrt{e-1}}{2}\approx0{,}65>0$

إذن : $$F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right)>\frac{\frac{\sqrt{e-1}}{2}}{\ln\left(1+\frac{4(e-1)}{4}\right)}$$

يعني : $$\boxed{F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right)>\frac{\sqrt{e-1}}{2}}\quad(2)$$

نضع : $G(x)=F(x)-x$

من (1) و(2) نستنتج : $$\boxed{G\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right).G(\sqrt{e-1})<0}\quad(3)$$

لدينا $F$ دالة متصلة و تناقصية قطعا على $]0,\sqrt{2}]$

$\boxed{\text{إذن } G \text{ دالة متصلة و تناقصية قطعا على } ]0,\sqrt{2}]}$ (4)

لأن : $G'(x)=F'(x)-1<0$

من (3) و (4) نستنتج حسب مبرهنة القيم الوسيطية وجود حل وحيد للمعادلة $G(x)=0$ أو المعادلة $F(x)=x$ في المجال $]0,\sqrt{2}]$ .