



استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

$$x * y = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$$

لكل x و y من المجال $I =]0,1[$ نضع :

التمرين الأول : (3,5 ن)

① (أ) بين أن $(*)$ قانون تركيب داخلي في I . 0,50 ن

(ب) بين أن القانون $(*)$ تبادلي و تجميعي. 0,50 ن

(ج) بين أن $(I,*)$ يقبل عنصرا محايدا ينبغي تحديده. 0,50 ن

(2) بين أن $(I,*)$ زمرة تبادلية. 0,50 ن

$$\mathbb{K} = \left\{ \frac{1}{2^n + 1} / n \in \mathbb{Z} \right\}$$

و

$$\mathbb{H} = \{ 2^n / n \in \mathbb{Z} \}$$

(3) نعتبر المجموعتين :

(أ) بين أن \mathbb{H} زمرة جزئية للزمرة (\mathbb{R}_+^*, \times) . 0,50 ن

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{H} &\longrightarrow I \\ x &\longrightarrow \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

(ب) نعتبر التطبيق φ المعرف بما يلي : 0,50 ن

بين أن التطبيق φ تشاكل من (\mathbb{H}, \times) إلى $(I, *)$

(ج) استنتج أن $(\mathbb{K}, *)$ زمرة جزئية للزمرة $(I, *)$. 0,50 ن

التمرين الثاني : (2,5 ن)

ليكن x عددا صحيحا طبيعيا يحقق $10^x \equiv 2[19]$.



(1) (أ) تحقق أن : $10^{x+1} \equiv 1[19]$ 0,25 ن

(ب) بين أن : $10^{18} \equiv 1[19]$ 0,50 ن

(2) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين 18 و $(x+1)$.

(أ) بين أن : $10^d \equiv 1[19]$ 0,75 ن

(ب) بين أن : $d \equiv 18$ 0,50 ن

(ج) استنتج أن : $x \equiv 17[18]$ 0,50 ن

التمرين الثالث : (4,0 ن)

(I) نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(E) : z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i) = 0$$

(1) بين أن العدد $-2i$ حل للمعادلة (E) . 0,50 ن

(2) حدد العددين العقديين α و β بحيث :

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i) = (z + 2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

(3) (أ) حدد الجذرين المربعين للعدد $(5 - 12i)$. 0,50 ن

(ب) حل في \mathbb{C} المعادلة (E) . 0,50 ن



(II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(\sigma, \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A و B و C التي أحاقها على التوالي هي : $a = -1 + 3i$ و $b = -2i$ و $c = 2 + i$.

① بين أن ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في النقطة C . 0,50 ن

② نعتبر الدوران \mathcal{R}_1 الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{3}$ و الدوران \mathcal{R}_2 الذي مركزه A و زاويته $\frac{-2\pi}{3}$.

لتكن M نقطة من المستوى العقدي لحقها z و صورتها بالدوران \mathcal{R}_1 و \mathcal{R}_2 صورتهما بالدوران M_1 و M_2 صورتهما بالدوران \mathcal{R}_2 .

① تحقق أن الصيغة العقدية للدوران \mathcal{R}_1 هي : $z_1 = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)z - \sqrt{3} - i$ 0,50 ن

② حدد z_2 لحق M_2 بدلالة z . 0,50 ن

③ استنتج أن النقطة I منتصف القطعة $[M_1M_2]$ نقطة ثابتة. 0,50 ن

التمرين الرابع : (6,0 ن) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = x + \ln x$

و ليكن (\mathcal{C}) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\sigma, \vec{i}, \vec{j})$ ($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm}$)

① أحسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ 1,00 ن

② اضع جدول تغيرات الدالة f . 0,50 ن

③ بين أن الدالة f تقابل من المجال $]0, +\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده ثم ضع جدول تغيرات التقابل العكسي f^{-1} . 0,75 ن

④ أحسب : $f(1)$ و $f(e)$ ثم أنشئ (\mathcal{C}) و $(\mathcal{C})^{-1}$ منحنى الدالة f^{-1} في نفس المعلم $(\sigma, \vec{i}, \vec{j})$. 0,50 ن



④ ا أحسب التكامل : $\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx$ (يمكن أن تضع $t = f^{-1}(x)$) 0,50 ن

⑤ استنتج مساحة حيز المستوى المحصور بين $(\mathcal{C})^{-1}$ و المستقيمت : $x = 1$ و $x = e + 1$ و $y = x$. 0,50 ن

⑤ نعتبر المعادلة : $x + \ln x = n$: (E_n) .

① بين أن المعادلة (E_n) تقبل حلا وحيدا x_n . 0,25 ن

② حدد قيمة x_1 ثم بين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ 0,50 ن

⑥ ا بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f(x_n) \leq f(n)$ ثم استنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : x_n \leq n$. 0,50 ن

② بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n - \ln n \leq x_n$. 0,50 ن



③ أحسب النهايتين التاليتين : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x_n}{n - \ln n}\right)$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x_n - n}{n}\right)$ 0,50 ن

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و f_n الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$f_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n}$$

① بين أنه من أجل $n \geq 2$ يوجد عدد حقيقي و حيد α_n من المجال $]0,1[$ بحيث : $f_n(\alpha_n) = 0$ ن 0,50

② بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة (نضع : $\ell = \lim_{+\infty}(\alpha_n)$) ن 0,75

③ (أ) تحقق أنه من أجل $t \neq 1$ لدينا : $1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$ ن 0,50

ⓑ استنتج أن : $\alpha_n + \frac{(\alpha_n)^2}{2} + \frac{(\alpha_n)^3}{3} + \dots + \frac{(\alpha_n)^n}{n} = -\ln(1 - \alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt$ ن 0,50



④ (أ) بين أن : $1 + \ln(1 - \alpha_n) = - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt$ ن 0,50

ⓑ بين أن : $(\forall n \geq 2) : 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)}$ ن 0,50

Ⓒ استنتج أن : $\ell = 1 - e^{-1}$ ن 0,50

