استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,5 ن)

لكل x و y من المجال $I=]0,1[$ نضع : $x*y=\dfrac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}$

① أ) بين أن $(*)$ قانون تركيب داخلي في I . — 0,50 ن

ب) بين أن القانون $(*)$ تبادلي و تجميعي . — 0,50 ن

ج) بين أن $(I,*)$ يقبل عنصرا محايدا ينبغي تحديده. — 0,50 ن

② بين أن $(I,*)$ زمرة تبادلية. — 0,50 ن

③ نعتبر المجموعتين : $\mathbb{H}=\{\ 2^n\ /\ n\epsilon\mathbb{Z}\}$ و $\mathbb{K}=\left\{\dfrac{1}{2^n+1}\ /\ n\epsilon\mathbb{Z}\right\}$

أ) بين أن $\mathbb{H}$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{R}_+^*,\times)$. — 0,50 ن

ب) نعتبر التطبيق φ المعرف بما يلي : — 0,50 ن

$$\varphi:\ \mathbb{H}\longrightarrow I,\qquad x\longrightarrow \frac{1}{x+1}$$

بين أن التطبيق φ تشاكل من $(\mathbb{H},\times)$ إلى $(I,*)$

ج) استنتج أن $(\mathbb{K},*)$ زمرة جزئية للزمرة $(I,*)$. — 0,50 ن

التمرين الثاني : (2,5 ن)

ليكن x عددا صحيحا طبيعيا يحقق $10^x\equiv 2[19]$.

① أ) تحقق أن : $10^{x+1}\equiv 1[19]$. — 0,25 ن

ب) بين أن : $10^{18}\equiv 1[19]$. — 0,50 ن

② ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين 18 و $(x+1)$.

أ) بين أن : $10^d\equiv 1[19]$. — 0,75 ن

ب) بين أن : $d\equiv 18$. — 0,50 ن

ج) استنتج أن : $x\equiv 17[18]$. — 0,50 ن

التمرين الثالث : (4,0 ن)

(I) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(E):\ z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)=0$$

① بين أن العدد $-2i$ حل للمعادلة (E) . — 0,50 ن

② حدد العددين العقديين α و β بحيث : — 0,50 ن

$$(\forall z\epsilon\mathbb{C}):\ z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)=(z+2i)(z^2+\alpha z+\beta)$$

③ أ) حدد الجذرين المربعين للعدد $(5-12i)$. — 0,50 ن

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) . — 0,50 ن

(II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(\mathcal{O},\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a=-1+3i$ و $b=-2i$ و $c=2+i$.

0,50 ن | ① بين أن ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في النقطة C.

② نعتبر الدوران $\mathcal{R}_1$ الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{3}$ و الدوران $\mathcal{R}_2$ الذي مركزه A و زاويته $\frac{-2\pi}{3}$.

لتكن M نقطة من المستوى العقدي لحقها z و M_1 صورتها بالدوران $\mathcal{R}_1$ و M_2 صورتها بالدوران $\mathcal{R}_2$.

0,50 ن | أ) تحقق أن الصيغة العقدية للدوران $\mathcal{R}_1$ هي : $z_1=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z-\sqrt{3}-i$

0,50 ن | ب) حدد z_2 لحق M_2 بدلالة z .

0,50 ن | ج) استنتج أن النقطة I منتصف القطعة $[M_1M_2]$ نقطة **ثابتة .**

التمرين الرابع : (6,0 ن)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $\boxed{f(x)=x+\ln x}$.

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\mathcal{O},\vec{i},\vec{j})(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1\text{cm})$

1,00 ن | ① أحسب النهايات التالية: $\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)}$ و $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}}$ و $\boxed{\lim_{x\to0^-}f(x)}$ و $\boxed{\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)}$

0,50 ن | ② أ) ضع جدول تغيرات الدالة f .

0,75 ن | ب) بين أن الدالة f تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده ثم ضع جدول تغيرات التقابل العكسي f^{-1} .

0,50 ن | ③ أحسب : $f(1)$ و $f(e)$ ثم أنشىء $(\mathscr{C})$ و $(\overset{-1}{\mathscr{C}})$ منحنى الدالة f^{-1} في نفس المعلم $(\mathcal{O},\vec{i},\vec{j})$.

0,50 ن | ④ أ) أحسب التكامل : $\int_1^{e+1}f^{-1}(x)\mathrm{d}x$ (يمكن أن تضع $t=f^{-1}(x)$)

0,50 ن | ب) استنتج مساحة حيز المستوى المحصور بين $(\overset{-1}{\mathscr{C}})$ و المستقيمات : $x=1$ و $x=e+1$ و $y=x$.

⑤ نعتبر المعادلة : $(E_n)\ :\ x+\ln x=n$.

0,25 ن | أ) بين أن المعادلة (E_n) تقبل حلا وحيدا x_n .

0,50 ن | ب) حدد قيمة x_1 ثم بين أن : $\lim_{n\to+\infty}x_n=+\infty$

0,50 ن | ⑥ أ) بين أن $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ f(x_n)\le f(n)$ ثم استنتج أن $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*):\ x_n\le n$.

0,50 ن | ب) بين أن $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ n-\ln n\le x_n$.

0,50 ن | ج) أحسب النهايتين التاليتين: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n-n}{n}\right)$ و $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n}{n-\ln n}\right)$

التمرين الخامس : (4,5 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و f_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}$$

0,50 ن ① بين أنه من أجل $n \geq 2$ يوجد عدد حقيقي و حيد α_n من المجال $]0,1[$ بحيث : $f_n(\alpha_n) = 0$.

0,75 ن ② بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة (نضع : $\ell = \lim_{+\infty}(\alpha_n)$)

0,50 ن ③ أ) تحقق أنه من أجل $t \neq 1$ لدينا : $1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$

0,50 ن ب) استنتج أن : $\alpha_n + \frac{(\alpha_n)^2}{2} + \frac{(\alpha_n)^3}{3} + \cdots + \frac{(\alpha_n)^n}{n} = -\ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}dt$

0,50 ن ④ أ) بين أن : $1 + \ln(1-\alpha_n) = -\int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}dt$

0,50 ن ب) بين أن : $(\forall n \geq 2) \ : \quad 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)}$

0,50 ن ج) استنتج أن : $\boxed{\ell = 1 - e^{-1}}$

التمرين الأول : (3,5 ن)

■ ① أ

ليكن x و y عنصرين من $]0,1[$

إذن : $0 < x < 1$ و $0 < y < 1$

إذن : $-1 < -x < 0$ و $-1 < -y < 0$

إذن : $0 < 1 - x < 1$ و $0 < 1 - y < 1$

و منه : $\boxed{0 < (1-x)(1-y) < 1}$ (1)

و بما أن $xy > 0$ فإن : $(1-x)(1-y) + xy > xy$

يعني : $\boxed{\dfrac{xy}{(1-x)(1-y) + xy} < 1}$ (2)

و لدينا : $xy > 0$ و $xy + (1-x)(1-y) > 0$

إذن : $\boxed{\dfrac{xy}{(1-x)(1-y) + xy} > 0}$ (3)

من (2) و (3) نستنتج أن :

$$(\forall (x,y) \epsilon I^2) \; ; \; 0 < \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)} < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall (x,y) \epsilon I^2) \; ; \; 0 < x * y < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall (x,y) \epsilon I^2) \; ; \; x * y \; \epsilon \; I$$

إذن $*$ قانون تركيب داخلي في I .

■ ① ب

ليكن x و y عنصرين من I

لدينا :

$$x * y = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)} = \frac{yx}{yx + (1-y)(1-x)} = y * x$$

إذن $*$ قانون تبادلي في I .

لتكن x و y و z ثلاثة عناصر من I .

لدينا :

$$x * (y * z) = \frac{x(y*z)}{x(y*z) + (1-x)\big(1-(y*z)\big)} = \frac{xyz}{xyz + (1-x)(1-y)(1-z)}$$

و بنفس الطريقة نحسب $(x * y) * z$ نحصل على :

$$(x * y) * z = \frac{xyz}{xyz + (1-x)(1-y)(1-z)} = x * (y * z)$$

و بالتالي : $*$ قانون تجميعي في I .

■ ① ج

ليكن e العنصر المحايد للقانون $*$ في I .

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x \epsilon I) \; ; \; x * e = e * x = x$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x \epsilon I) \; ; \; \frac{xe}{xe + (1-x)(1-e)} = x$$

نختزل بالعدد الغير المنعدم x نحصل على :

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x \epsilon I) \; ; \; \frac{e}{xe + (1-x)(1-e)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x \epsilon I) \; ; \; xe + 1 - e - x + ex = e$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x \epsilon I) \; ; \; e = \frac{1}{2} \; \epsilon \;]0,1[$$

إذن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا في I و هو : $\frac{1}{2}$.

■ ②

حصلنا لحد الآن على ما يلي :

- $I =]0,1[$ مجموعة غير فارغة
- $*$ قانون تركيب داخلي في I .
- $*$ يقبل $\frac{1}{2}$ كعنصر محايد في I .
- $*$ تبادلي و تجميعي في I .

إذن لكي تكون $(I,*)$ زمرة تبادلية يكفي أن نبين أن :
كل عنصر x يقبل مماثلا بالقانون $*$ في المجموعة I .

ليكن x' مماثل x في المجموعة I بالنسبة للقانون $*$

إذن : $x * x' = x' * x = \dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{xx'}{xx' + (1-x)(1-x')} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x' = (1-x)$$

بما أن : $x \epsilon I$ فإن $1 > x > 0$

إذن : $1 > 1 - x > 0$

و منه $(1-x)$ هو مماثل x بالنسبة لـ $*$ في I .

و بالتالي : $(I,*)$ زمرة تبادلية .

■ ③ أ

لدينا $H = \{2^n \; / \; n \epsilon \mathbb{Z}\}$

إذن : H جزء غير فارغ من $\mathbb{R}_+^*$

لأن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \; ; \; 2^n \; \epsilon \; \mathbb{R}_+^*$

ليكن 2^n و 2^m عنصرين من H

لدينا : $2^n \times (2^m)^{-1} = 2^{n-m} \in H$

إذن : $(H,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

■ ③ب

ليكن x و y عنصرين من H .

لدينا : $\varphi(x) * \varphi(y) = \left(\frac{1}{1+x}\right) * \left(\frac{1}{1+y}\right)$

$$= \frac{\frac{1}{(1+x)(1+y)}}{\frac{1}{(1+x)(1+y)} + \left(1-\frac{1}{1+x}\right)\left(1-\frac{1}{1+y}\right)}$$

$$= \frac{1}{(1+x)(1+y)} \times \frac{(1+x)(1+y)}{1+xy}$$

$$= \frac{1}{1+xy} = \varphi(xy)$$

إذن φ تشاكل من $(H,\times)$ نحو $(I,*)$.

■ ③ج

ليكن 2^n عنصرا من H .

$$\varphi(2^n) = \frac{1}{1+2^n} \in K$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi(H) = K$$

لدينا : φ تشاكل من $(H,\times)$ نحو $(I,*)$.

و نعلم أن التشاكل يحافظ على بنية الزمرة.

و لدينا كذلك $(H,\times)$ زمرة جزئية لـ $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ حسب السؤال ③أ

إذن $(\varphi(H),\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(I,*)$

و بالتالي : $(K,*)$ زمرة جزئية للزمرة $(I,*)$.

التمرين الثاني : (2,5 ن)

■ ①أ

لدينا : $10^x \equiv 2[19]$

نضرب طرفي هذه المتوافقة في العدد 10 نجد : $10^{x+1} \equiv 20[19]$

من جهة أخرى لدينا : $20 \equiv 1[19]$

إذن : $\boxed{10^{x+1} \equiv 1[19]}$

■ ①ب

لدينا 19 عدد أولي.

إذن حسب مبرهنة $(Fermat)$:

$$(\forall\, a \wedge 19 = 1) \; ; \; a^{19-1} \equiv 1[19]$$

من أجل $a = 10$ لدينا $10 \wedge 19 = 1$ إذن : $10^{19-1} \equiv 1[19]$

أي : $\boxed{10^{18} \equiv 1[19]}$

■ ②أ

نضع : $d = (x+1) \wedge 18$ إذن حسب $(Bezout)$:

$$\exists\, (u,v) \in \mathbb{Z}^2 \; ; \; d = 18u + (x+1)v$$

لدينا : $10^{x+1} \equiv 1[19]$ إذن : $(10^{x+1})^v \equiv 1^v[19]$

يعني : $\boxed{10^{(x+1)v} \equiv 1[19]}$ (1)

و لدينا كذلك : $10^{18} \equiv 1[19]$ إذن : $10^{18u} \equiv 1^u[19]$

يعني : $\boxed{10^{18u} \equiv 1[19]}$ (2)

نضرب المتوافقتين (1) و (2) طرفا بطرف نحصل على :

$$10^{18u} \times 10^{v(x+1)} \equiv 1[19]$$

يعني : $10^{18u+v(x+1)} \equiv 1[19]$

و بالتالي : $\boxed{10^d \equiv 1[19]}$

■ ②ب

لدينا : $d = 18 \wedge (x+1)$

إذن : $\boxed{d \backslash 18}$

و منه : $d \in \{1,2,3,6,9,18\}$

و لدينا : $\begin{cases} 10 \equiv 10[19] \\ 10^2 \equiv 5[19] \\ 10^3 \equiv 12[19] \\ 10^6 \equiv 11[19] \\ 10^9 \equiv 18[19] \\ 10^{18} \equiv 1[19] \end{cases}$

و بالتالي : $\boxed{d = 18}$

■ ②ج

لدينا : $18 = 18 \wedge (x+1)$

إذن : $18 \,/\, (x+1)$

و بما أن : $18 \,/\, (-18)$

فإن : $18/(x+1) - 18$

أي : $18 \,/\, (x-17)$

و منه : $x \equiv 17[18]$

التمرين الثالث : (4 ن)

الجزء الأول

■ 1

تعويض سهل يمنحك نصف نقطة مجانية.

■ 2

ننشر التعبير : $(z+2i)(z^2+\alpha z+\beta)$ نحصل على :

$$\begin{aligned}(z+2i)(z^2+\alpha z+\beta)\\ &= z^3+(\alpha+2i)z^2+(\beta+2i\alpha)z+2i\beta\end{aligned}$$

و منه نستنتج حسب مبدأ مقابلة معاملات الحدود من نفس الدرجة أن :

$$\begin{cases}2i\beta=-10(1+i)\\ \alpha+2i=-(1+2i)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-(1+4i)\\ \beta=5i-5\end{cases}$$

■ 3 أ

ليكن $(x+iy)$ جذرا مربعا للعدد العقدي $(5-12i)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+iy)^2=5-12i\\ |x+iy|=\sqrt{5^2+12^2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x^2-y^2)+2ixy=5-12i\\ x^2+y^2=13\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x^2-y^2)=5\\ xy=-6\\ x^2+y^2=13\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2=9\\ y^2=4\\ xy=-6\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}x=-3 \text{ أو } x=3\\ y=2 \text{ أو } y=-2\end{cases}}$$

إذن الجذران المربعان للعدد العقدي $5-12i$ هما : $(3-2i)$ و $(-3+2i)$

■ 3 ب

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$(z+2i)(z^2-(1+4i)z-5+5i)=0$$

يجب إذن حل المعادلة التالية أولا : $z^2-(1+4i)z-5+5i=0$

لدينا : $\Delta=(1+4i)^2-4(-5+5i)$

$$\begin{aligned}&=5-12i\\ &=(3-2i)^2\end{aligned}$$

إذن : $z_1=-1+3i$ و $z_2=2+i$

و بالتالي : المعادلة (E) تقبل ثلاث حلول مختلفة و هي :

$$-1+3i \text{ و } 2+i \text{ و } -2i$$

الجزء الثاني

■ 1

لدينا : $\dfrac{a-c}{b-c}=\dfrac{-1+3i-2-i}{-2i-2-i}=\dfrac{3-2i}{2+3i}=-i=e^{\frac{-i\pi}{2}}$

و منه : $\boxed{(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})\equiv\dfrac{-\pi}{2}[2\pi]}$ (1)

و لدينا كذلك : $\left|\dfrac{a-c}{b-c}\right|=|-i|=1$

إذن : $\boxed{\dfrac{CA}{CB}=1}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن المثلث ABC مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في C .

■ 2 أ

نضع : $M(z)$ و $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$

لدينا : $\mathcal{R}_1(M)=M_1$

$$\Leftrightarrow (z_1-b)=e^{\frac{i\pi}{3}}(z-b)$$

$$\Leftrightarrow (z_1+2i)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(z+2i)$$

$$\Leftrightarrow z_1=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z-\sqrt{3}-i$$

■ 2 ب

لدينا : $\mathcal{R}_2(M)=M_2$

$$\Leftrightarrow (z_2-a)=e^{\frac{-2i\pi}{3}}(z-a)$$

$$\Leftrightarrow (z_2+1-3i)=\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(z+1-3i)$$

$$\Leftrightarrow z_2=-\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z-(1-3i)\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

■ 2 ج

لدينا I هي منتصف القطعة $[M_1M_2]$.

$$\Leftrightarrow aff(I)=\frac{z_1+z_2}{2}$$

$$\Leftrightarrow aff(I)=-\sqrt{3}-i-\frac{(1-3i)(3+i\sqrt{3})}{2}$$

$$\Leftrightarrow aff(I)=constante\ complexe$$

إذن $aff(I)$ عدد عقدي ثابت.

أي : $\boxed{I \text{ نقطة ثابتة في المستوى.}}$

التمرين الرابع : (6 ن)

■ ①

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

■ ② أ

ليكن x عنصرا من $]0,+\infty[$

لدينا f قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للإشتقاق على $]0,+\infty[$

و لدينا : $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} > 0$

إذن f دالة تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

■ ② ب

لدينا f دالة متصلة و تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

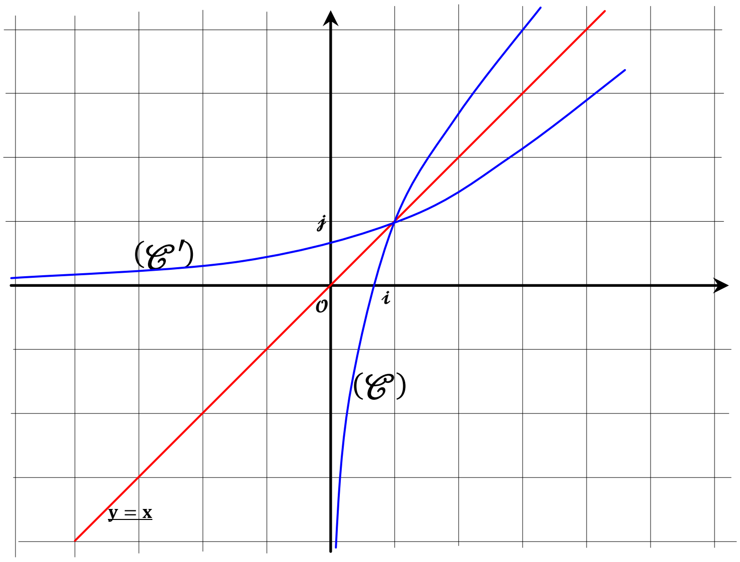
إذن f تقابل من $]0,+\infty[$ نحو صورته $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$

و تقابله العكسي f^{-1} دالة متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
f^{-1}	0 ↗	$+\infty$

■ ③

$$f(1) = 1 + \ln 1 = 1$$
$$f(e) = e + \ln e = e + 1 \approx 3{,}72$$



■ ④ أ

لنحسب التكامل : $\displaystyle\int_1^{e+1} f^{-1}(x)\,dx$

من أجل ذلك نضع : $t = f^{-1}(x)$ إذن : $x = f(t)$

و منه : $\dfrac{dx}{dt} = f'(t)$

إذن :

$$\begin{aligned}
\int_1^{e+1} f^{-1}(x)\,dx &= \int_1^{e} t f'(t)\,dt \\
&= [tf(t)]_1^e - \int_1^e f(t)\,dt \\
&= [tf(t)]_1^e - \left[\frac{t^2}{2} + t\ln t - t\right]_1^e \\
&= e^2 + e - 1 - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{e^2 + 2e - 3}{2} \approx 4{,}9
\end{aligned}$$

■ ④ ب

نضع A هي مساحة الحيز المذكور في السؤال إذن :

$$A = \int_1^{e+1} |x - f^{-1}(x)|\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \int_1^{e+1} x\,dx - \int_1^{e+1} f^{-1}(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{e+1} - \left(\frac{e^2 + 2e - 3}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \left(\frac{e^2 + 2e}{2}\right) - \left(\frac{e^2 + 2e - 3}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \frac{3}{2}$$

■ 5 أ

نضع : $h(x) = x + \ln x - n$

لدينا h دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$

و لدينا كذلك : $h'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$

إذن h دالة تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$

و منه h تقابل من $]0,+\infty[$ نحو صورته $]-\infty,+\infty[$

و بما أن : $0 \in]-\infty,+\infty[$ فإنه يمتلك سابقا واحدا x_n بالتقابل h .

يعني : $\exists!\ x_n \in]0,+\infty[\ ;\ h(x_n) = 0$

بتعبير آخر : $\exists!\ x_n \in]0,+\infty[\ ;\ x_n + \ln(x_n) = n$

■ 5 ب

x_1 هو حل المعادلة : $x + \ln x = 1$

إذن : $x_1 = 1$

و لدينا : $f(x_n) = n$ إذن : $x_n = f^{-1}(n)$

و بما أن : f^{-1} دالة تزايدية قطعا فإن :

$$x_{n+1} = f^{-1}(n+1) > f^{-1}(n) = x_n \quad (1)$$

إذن من النتيجة $x_{n+1} > x_n$ نستنتج أن $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \text{متتالية تزايدية قطعا.}}$

نفترض أن المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ مكبورة بعدد حقيقي A

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ x_n \le A$

$\Leftrightarrow$ $(\forall n\in\mathbb{N})\ :\ f(x_n) \le f(A) = B$

$\Leftrightarrow$ $(\forall n\in\mathbb{N})\ :\ n \le B$

$\Leftrightarrow$ المجموعة $\mathbb{N}$ مكبورة بالعدد B

$\Leftrightarrow$ مستحيل

إذن : $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \text{غير مكبورة}}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متباعدة.

أي : $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

■ 6 أ

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow n \ge 1$

$\Leftrightarrow \ln n \ge 0$

$\Leftrightarrow n + \ln n \ge n$

$\Leftrightarrow f(n) \ge f(x_n)$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ f(n) \ge f(x_n)$

و بما أن f^{-1} دالة تزايدية فإن : $f^{-1}(f(n)) \ge f^{-1}(f(x_n))$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ n \ge x_n}$

■ 6 ب

لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ n \ge x_n$

$$\Leftrightarrow (\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ \frac{x_n}{n} \le 1$$

$$\Leftrightarrow (\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ \ln\left(\frac{x_n}{n}\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow (\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ \ln(x_n) - ln(n) \le 0$$

$$\Leftrightarrow (\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ \underbrace{x_n + \ln(x_n)}_{n} - ln(n) \le x_n$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ n - ln(n) \le x_n}$$

ملاحظة :

لدينا :

$$\lim_{n\infty}(n - \ln n) = \lim_{n\infty} n\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right) = (+\infty)(1-0) = +\infty$$

إذن : $\underbrace{n - ln(n)}_{\to +\infty} \le x_n$

و هذا دليل آخر على أن : $\lim_{n\infty} x_n = +\infty$

■ 6 ج

لدينا : $n - \ln n \le x_n$

إذن : $\frac{n - x_n}{n} \le \frac{\ln n}{n}$

و منه : $\left|\frac{n - x_n}{n}\right| \le \frac{\ln n}{n}$

و بما أن : $\lim_{n\infty}\left(\frac{ln\, n}{n}\right) = 0$

فإن : $\lim_{n\infty}\left|\frac{n - x_n}{n}\right| = 0$

أي : $\lim_{n\infty}\left(\frac{x_n - n}{n}\right) = 0$

و لدينا حسب السؤالين (أ) و (ب) : $n - \ln n \le x_n \le n$

إذن : $\frac{n - \ln n}{n - ln\, n} \le \frac{x_n}{n - ln\, n} \le \frac{n}{n - ln\, n}$

يعني : $1 \le \frac{x_n}{n - ln\, n} \le \frac{n}{n - ln\, n}$

و بما أن : $\lim_{n\infty}\left(\frac{n}{n - ln\, n}\right) = \lim_{n\infty}\left(\frac{1}{1 - \frac{ln\, n}{n}}\right) = 1$

فإن : $\underbrace{1}_{\to \boxed{1}} \le \frac{x_n}{n - ln\, n} \le \underbrace{\frac{n}{n - ln\, n}}_{\to \boxed{1}}$

و بالتالي : $\boxed{\lim_{n\infty}\left(\frac{x_n}{n - ln\, n}\right) = 1}$

التمرين الخامس : (4 ن)

■ ①

لدينا f_n دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على $]0,1[$.

و لدينا : $\forall x \in]0,1[\ ;\ f_n'(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} > 0$

إذن : f_n دالة تزايدية قطعا على $]0,1[$

و منه f_n تقابل من $]0,1[$ نحو $]f_n(0), f_n(1)[$

لدينا : $f_n(0) = -1 < 0$

و $f_n(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > 0$

إذن : $0 \in]f_n(0), f_n(1)[$

و منه : 0 يمتلك سابقا واحدا α_n بالتقابل f_n

يعني : $\exists!\ \alpha_n \in]0,1[\ ;\ f_n(\alpha_n) = 0$

■ ②

لدينا : $f_{n+1}(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$\Leftrightarrow\ f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

و بما أن : $x \in]0,1[$ فإن : $\frac{x^{n+1}}{n+1} > 0$

و منه : $\forall x \in]0,1[\ ;\ f_{n+1}(x) > f_n(x)$

و لدينا كذلك : $\alpha_{n+1} \in]0,1[$ إذن : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_{n+1})$

و نعلم أن : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = f_n(\alpha_n) = 0$

إذن : $f_n(\alpha_n) > f_n(\alpha_{n+1})$

و بما أن f_n دالة تزايدية قطعا على $]0,1[$ فإن : $\boxed{\alpha_n > \alpha_{n+1}}$

إذن $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ متتالية تناقصية قطعا.

و لدينا : $(\forall n \geq 2)\ ;\ 0 < \alpha_n < 1$

يعني أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ مصغورة بالعدد 0

و بالتالي : $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ متتالية متقاربة .

■ ③ أ

لدينا $(t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي t المخالف لـ 1 .

إذن : $1 + t + \cdots + t^{n-1} = \frac{1-t^n}{1-t} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$

■ ③ ب

لدينا من أجل : $t \neq 1$

$$1 + t + \cdots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$$

إذن :

$$\int_0^{\alpha_n} (1 + t + \cdots + t^{n-1})\,dt = \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}\right) dt$$

$$\Leftrightarrow\ \alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \cdots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt$$

■ ④ أ

$$\alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \cdots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt$$

و نعلم أن : $f_n(\alpha_n) = 0$

يعني : $-1 + \alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \cdots + \frac{\alpha_n^n}{n} = 0$

إذن : $1 = -\ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt$

و منه : $\boxed{1 + \ln(1-\alpha_n) = -\int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt}$

■ ④ ب

ننطلق من الكتابة : $0 \leq t \leq \alpha_n$

$$\Leftrightarrow\ 0 \leq 1 - \alpha_n \leq 1 - t$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{1-\alpha_n} \geq \frac{1}{1-t} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow\ 0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-\alpha_n}$$

$$\Leftrightarrow\ 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt \leq \frac{1}{(1-\alpha_n)} \int_0^{\alpha_n} t^n\,dt$$

$$\Leftrightarrow\ 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt \leq \left(\frac{1}{1-\alpha_n}\right)\left(\frac{\alpha_n^{n+1}}{n+1}\right)$$

و بما أن : $\alpha_n^{n+1} < 1$

فإن : $\left(\frac{1}{1-\alpha_n}\right)\left(\frac{\alpha_n^{n+1}}{n+1}\right) \leq \left(\frac{1}{1-\alpha_n}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right)$

و بالتالي :

$$\boxed{(\forall n \geq 2)\ ;\ 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt \leq \left(\frac{1}{1-\alpha_n}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

■ 4 ج

لدينا :

$$\underbrace{0}_{\downarrow 0} \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt \leq \underbrace{\left(\frac{1}{1-\alpha_n}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right)}_{\xrightarrow{+\infty} \boxed{0}}$$

إذن :

$$\lim_{n\infty} \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt = 0$$

و منه :

$$\lim_{n\infty} (1 + \ln(1-\alpha_n)) = 0$$

نضع :

$$\ell = \lim_{n\infty} \alpha_n$$

إذن :

$$1 + \ln(1-\ell) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(1-\ell) = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{1-\ell}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-\ell} = e$$

$$\Leftrightarrow \quad e(1-\ell) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad e - e\ell = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \ell = \frac{e-1}{e}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\ell = 1 - e^{-1}}$$

■ و الحمد لله رب العالمين ■