المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي و تكوين الأطر و البحث العلمي
المركز الوطني للتقويم و الإمتحانات

الإمتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة العادية 2011

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 9
مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (4,0 ن)

الجزءان الأول و الثاني مستقلان

(I) في الحلقة الواحدية $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ نعتبر المصفوفتين $\mathbb{A}$ و $\mathbb{I}$ المعرفتين بما يلي :

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbb{I}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

نضع : $\mathbb{A}^0=\mathbb{I}$ و $\mathbb{A}^1=\mathbb{A}$ و $\mathbb{A}^2=\mathbb{A}\times\mathbb{A}$ و $\forall n\in\mathbb{N}: \mathbb{A}^{n+1}=\mathbb{A}^n\times\mathbb{A}$

1) بين أن : $\forall k\in\mathbb{N}:\ \mathbb{A}^{2k}=\mathbb{I}$ — 0,50 ن

2) بين أن المصفوفة $\mathbb{A}$ تقبل مقلوبا $\mathbb{A}^{-1}$ ينبغي تحديده. — 0,50 ن

ليكن α عددا حقيقيا موجبا قطعا .

لكل x و y من المجال $I=]\alpha,+\infty[$ نضع : $x*y=(x-\alpha)(y-\alpha)+\alpha$

1) أ) بين أن : $*$ قانون تركيب داخلي في I — 0,50 ن

ب) بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي — 0,50 ن

ج) بين أن المجموعة $(I,*)$ تقبل عنصرا محايدا يتم تحديده — 0,50 ن

2) بين أن المجموعة $(I,*)$ زمرة تبادلية — 0,50 ن

3) نعتبر التطبيق :

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^* ,\quad x \longrightarrow \frac{1}{x-\alpha}$$

أ) بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(I,*)$ إلى $(\mathbb{R}_+^*,\times)$. — 0,50 ن

ب) حل في المجموعة I المعادلة : $x^{(3)}=\alpha^3+\alpha$ بحيث : $x^{(3)}=x*x*x$ — 0,50 ن

التمرين الثاني : (2,5 ن)

ليكن N العدد الصحيح الطبيعي الممثل في نظمة العد العشري بما يلي : $N=\underbrace{111\ldots11}_{\text{2010 مرة 1}}$

1) بين أن N يقبل القسمة على العدد 11 — 0,25 ن

2) أ) تحقق أن العدد 2011 أولي , و أن : $10^{2010}-1=9N$ — 0,75 ن

ب) بين أن العدد 2011 يقسم العدد $9N$ — 0,50 ن

ج) استنتج أن العدد 2011 يقسم العدد N . — 0,50 ن

3) بين أن العدد N يقبل القسمة على العدد 22121 . — 0,50 ن

التمرين الثالث : (3,5 ن) الجزءان الأول و الثاني مستقلان

(I) ليكن m عددا عقديا غير منعدم . نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$\boxed{(E_m) :\ z^2 + [(1-i)m-4]z - im^2 - 2(1-i)m + 4 = 0}$$

① تحقق أن العدد $z_1 = 2 - m$ حل للمعادلة (E_m) . — 0,50 ن

② ليكن z_2 الحل الثاني للمعادلة (E_m) .

(أ) بين أن $\quad z_1 z_2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad im^2 + 2(1-i) - 3 = 0$ — 0,50 ن

(ب) حدد قيمتي m بحيث $\quad z_1 z_2 = 1$ — 1,00 ن

(II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(\mathcal{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر التطبيق $\mathcal{S}$ الذي يربط النقطة M التي لحقها z بالنقطة M' التي لحقها z' بحيث : $z' = -(z-1)+1$

و الدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه النقطة Ω ذات اللحق $(1+i)$ و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$ و ليكن z'' لحق النقطة M'' صورة M بالدوران $\mathcal{R}$.

①(أ) بين أن التطبيق $\mathcal{S}$ هو التماثل المركزي الذي مركزه النقطة ذات اللحق 1 — 0,25 ن

(ب) بين أن : $z'' = iz + 2$. — 0,25 ن

② نفترض أن النقطة M تخالف $\mathcal{O}$ أصل المعلم و لتكن A النقطة التي لحقها 2

(أ) أحسب $\dfrac{z''-2}{z'-2}$ ثم استنتج طبيعة المثلث $AM'M''$ — 0,50 ن

(ب) حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط A و Ω و M' و M'' متداورة. — 0,50 ن

التمرين الرابع : (6,5 ن)

(I) دراسة الحلول الموجبة للمعادلة $\quad (E) \ :\ \ e^x = x^n \quad$ بحيث $n \in \mathbb{N}^*$.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة : $\mathcal{D} = [0,1[\cup]1,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{\ln x} \ ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\mathcal{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

① تحقق أنه لكل x من المجموعة $]0,1[\cup]1,+\infty[$ لدينا : $\left(e^x = x^n \ \Leftrightarrow n = f(x)\right)$. — 0,25 ن

② بين أن الدالة f قابلة للإشتقاق على اليمين في 0. — 0,50 ن

③ أحسب النهايات التالية ثم أوّل هندسيا النتائج المحصل عليها : — 1,50 ن

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}} \ \text{و} \ \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)} \ \text{و} \ \boxed{\lim_{x\to1^+} f(x)} \ \text{و} \ \boxed{\lim_{x\to1^-} f(x)}$$

④ أدرس تغيرات الدالة f على كل من المجالين $[0,1[$ و $]1,+\infty[$ ثم إعط جدول تغيراتها. — 0,75 ن

⑤ بين أن $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف يتم تحديد زوج احداثيتيها. — 0,50 ن

⑥ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$ — 0,50 ن

⑦ بين أنه إذا كان $n \geq 3$ فإن المعادلة (E) تقبل بالضبط حلين اثنين α_n و b_n بحيث $1 < \alpha_n < e < b_n$. — 0,50 ن

(II) دراسة تقارب المتتاليتين $(\alpha_n)_{n\geq3}$ و $(b_n)_{n\geq3}$.

① بين أن $(\forall n \geq 3):\ b_n \geq n$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(b_n)_{n\geq3}$ — 0,50 ن

② ⓐ بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq3}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة . — 0,50 ن

ⓑ بين أن $(\forall n \geq 3):\ \frac{1}{n} < ln(\alpha_n) < \frac{e}{n}$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq3}$. — 0,50 ن

ⓒ بين أن : $\lim_{n\to+\infty} (\alpha_n)^n = e$ — 0,50 ن

التمرين الخامس: (3,5 ن)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي :

$$\boxed{F(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt}$$

① ⓐ بين أن : $(\forall x \geq 0):\ 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$. — 0,50 ن

ⓑ بين أن : $(\forall x \geq 1):\ e^{-x^2} \leq e^{-x}$ ثم استنتج نهاية الدالة F عند $+\infty$. — 0,50 ن

② بين أن : F قابلة للإشتقاق على $[0, +\infty[$ و أن : $(\forall x \geq 0):\ F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$. — 0,50 ن

③ نعتبر الدالة العددية G المعرفة على $[0, \frac{\pi}{2}]$ بما يلي :

$$\begin{cases} G(x) = F(\tan x) \\ G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

ⓐ بين أن الدالة G متصلة على اليسار في $\frac{\pi}{2}$. — 0,25 ن

ⓑ بين أنه يوجد عدد حقيقي c ينتمي إلى المجال $]0, +\infty[$ بحيث : $F'(c) = 0$ و أن $F(c) = \frac{1}{2c}e^{-2c^2}$. — 0,75 ن

(يمكن تطبيق مبرهنة رول بالنسبة للدالة G على المجال $[0, \frac{\pi}{2}]$)

④ نعتبر الدالة العددية H المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $H(x) = F'(x)\frac{e^{x^2}}{2x}$

ⓐ بين أن الدالة H تناقصية قطعا على المجال $]0; +\infty[$. — 0,50 ن

ⓑ استنتج أن العدد c وحيد ثم إعط جدول تغيرات الدالة F . — 0,50 ن

عناصر الإجابة و سلم التنقيط

التمرين الأول	**4 نقط**
الجزء الأول:1-	البرهان بالترجع.............................0.5ن
2-	$A^{-1}=A$..................................0.5ن
الجزء الثاني:1-أ)	*قانون تركيب داخلي..................0.5ن
ب)	تبادلية القانون * ....0.25ن تجميعية القانون * 0.25ن
ج)	العنصر المحايد : $e=a+1$ 0.5ن
2-	مماثل x هو : $x'=a+\dfrac{1}{x-a}$ ....0.25ن $(I,*)$ زمرة تبادلية...............0.25ن
3- أ)	φ تقابل.......................... 0.25ن φ تشاكل...................... 0.25ن
ب)	حل المعادلة هو: $x=2a$ إذا كان $a\geq 0$ و المعادلة لا تقبل حلا إذا كان $a<0$ 0.5

التمرين الثاني	**2.5 نقطة**
1-	قابلية قسمة العدد N على 11 .... 0.25ن
2- أ)	التحقق من أن 2011 عدد أولي ....0.5ن التحقق من أن $10^{2010}-1=9N$....................0.25ن
ب)	حسب مبرهنة فيرما : 2011 يقسم العدد $10^{2010}-1$ 0.5ن
ج)	الإستنتاج باستعمال مبرهنة كوص 0.5ن
3-	نلاحظ أن: $22121=11\times 2011$ وأن 2011 و 11 عددين أوليين فيما بينهما..........0.5ن
التمرين الثالث	**3.5 نقطة**
الجزء الأول:-1	التحقق............................0.5ن
2-أ)	التكافؤ.............................. 0.5ن
ب)	قيمتي m هما : $\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)+i\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$ و $\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)+i\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$..........1ن
الجزء الثاني:1-أ)	.......................0.25ن
ب)	$z''-(1+i)=i\left(z-(1+i)\right)$.............0.25ن

2-أ)	$\frac{z''-2}{z'-2}=-i$ ....0.25ن $AM'M''$ متساوي الساقين و قائم الزاوية في A 0.25ن
ب)	(تمنح النقطة كاملة حتى و لو لم يتطرق المترشح للحالات الخاصة) المستقيم الذي معادلته: $x=1$ 0.5ن

التمرين الرابع	**6.5 نقطة**
الجزء الأول	
-1	$e^x=x^n \Leftrightarrow n=f(x)$ 0.25
-2	قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 0 ....0.5ن
-3	لكل نهاية من النهايات الأربعة ....0.25ن لكل تأويل من التأويلين 0.25ن
-4	حساب $f'(x)$ ....0.25ن تغيرات f ....0.25ن جدول تغيرات f 0.25ن
-5	$\left(e^2;\frac{e^2}{2}\right)$ زوج إحداثيتي نقطة الانعطاف..............0.5ن
-6	إنشاء المنحنى..............0.5ن
-7	وجود و وحدانية a_n و $1<a_n<e$..............0.25ن وجود و وحدانية b_n و $b_n>e$ 0.25ن
الجزء الثاني	
-1	$(\forall n\geq 3)\ b_n\geq n$ ....0.25ن $\lim_{n\to+\infty} b_n=+\infty$ 0.25ن
2-أ)	المتتالية $(a_n)_{n\geq 3}$ تناقصية ....0.25ن استنتاج تقارب $(a_n)_{n\geq 3}$ 0.25ن
ب)	تأطير : $ln(a_n)$ ....0.25ن استنتاج أن: $\lim_{n\to+\infty} a_n=1$ 0.25ن
ج)	استنتاج أن: $\lim_{n\to+\infty} a_n^n=e$ 0.5ن

التمرين الخامس	3.5نقطة
1-أ)	تأطير $F(x)$ 0.5ن
ب)	$e^{-x^2} \leq e^{-x}$ $(\forall x \geq 1)$...............0.25ن استنتاج أن: $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$ 0.25ن
-2	قابلية اشتقاق الدالة F ....0.25ن حساب $F^{'}(x)$ 0.25ن
3-أ)	اتصال الدالة G على اليسار في $\frac{\pi}{2}$ ....0.25ن تقبل جميع الحلول الصحيحة: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$ إذن...... أو من أجل $\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$ لدينا: $0 \leq G(x) = F(\tan x) \leq \tan(x) e^{-\tan x}$ إذن...... أو أية طريقة صحيحة أخرى
ب)	- تطبيق مبرهنة رول : وجود $c_1 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ بحيث $G^{'}(c_1) = (1 + \tan^2(c_1)) F^{'}(\tan c_1) = 0$ ....0.25ن - وجود $c \in]0, +\infty[$ بحيث $F^{'}(c) = 0$ $(c = \tan c_1)$ ....0.25ن - $F(c) = \frac{e^{-2c^2}}{2c}$ 0.25ن
4-أ)	الدالة H قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ و $H^{'}(x) = -\left(2 + \frac{1}{2x^2}\right) e^{-x^2} < 0$.........0.5ن
ب)	الدالة H تقابل(متصلة و رتيبة قطعا) و $H(c) = 0$ ومنه وحدانية العدد c ....0.25ن جدول تغيرات الدالة F 0.25ن