



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2013

الموضوع

الصفحة
1
3



NS22

3	مدة الإختبار	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكها	الشعبة أو المسلك

معلومات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- مدة إنجاز موضوع الامتحان : 3 ساعات ؛
- عدد الصفحات : 3 صفحات (الصفحة الأولى تتضمن معلومات والصفحتان المتبقيتان تتضمنان تمارين الامتحان)؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- في حالة عدم تمكن المترشح من الإجابة عن سؤال ما ، يمكنه استعمال نتيجة هذا السؤال لمعالجة الأسئلة الموالية ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة ؛
- بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمرين ، فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه ولا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة .

معلومات خاصة

- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها و تتوزع حسب المجالات كما يلي :

التمرين	المجال	النقطة الممنوحة
التمرين الأول	الهندسة الفضائية	3 نقط
التمرين الثاني	الأعداد العقدية	3 نقط
التمرين الثالث	حساب الاحتمالات	3 نقط
التمرين الرابع	المتتاليات العددية	3 نقط
التمرين الخامس	دراسة دالة وحساب التكامل	8 نقط

الموضوع

التمرين الأول (3 ن)

نعتبر ، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقط $A(-1,1,0)$ و $B(1,0,1)$ و $\Omega(1,1,-1)$ و الفلكة (S) التي مركزها Ω وشعاعها 3

- 1 أ- بين أن $\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ و تحقق من أن $x + y - z = 0$ معادلة ديكرتية للمستوى (OAB) 1
ب- تحقق من أن $d(\Omega, (OAB)) = \sqrt{3}$ ثم بين أن (OAB) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها $\sqrt{6}$ 1

2 ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة Ω والعمودي على المستوى (OAB)

$$\text{أ- بين أن : } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{تمثيل بارامتري للمستقيم } (\Delta) \quad 0.5$$

ب- حدد مثلوث إحداثيات مركز الدائرة (Γ) 0.5

التمرين الثاني (3 ن)

نعتبر ، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) ، النقط A و B و C التي أحاقها على التوالي هي a و b و c بحيث : $a = 7 + 2i$ و $b = 4 + 8i$ و $c = -2 + 5i$

$$1 \text{ أ- تحقق من أن } (1+i)(-3+6i) = -9+3i \text{ و بين أن } \frac{c-a}{b-a} = 1+i \quad 0.75$$

ب- استنتج أن $AC = AB\sqrt{2}$ وأعط قياسا للزاوية الموجهة $(\overline{AB}, \overline{AC})$ 1

2 ليكن R الدوران الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{2}$

أ- بين أن لحق النقطة D صورة النقطة A بالدوران R هو $d = 10 + 11i$ 0.75

ب- احسب $\frac{d-c}{b-c}$ و استنتج أن النقط B و C و D مستقيمية . 0.5

التمرين الثالث (3 ن)

يحتوي صندوق على 10 كرات : خمس كرات حمراء وثلاث كرات خضراء وكرتان بيضاوان (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس) .

نسحب عشوائيا و في آن واحد أربع كرات من الصندوق .

- 1 نعتبر الحدثين التاليين : A : " الحصول على كرتين حمراوين و كرتين خضراوين " 1.5
 B : " لا توجد أية كرة بيضاء من بين الكرات الأربع المسحوبة "

$$\text{بين أن } P(A) = \frac{1}{7} \text{ و } P(B) = \frac{1}{3}$$

2 ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات البيضاء المسحوبة .

أ- تحقق من أن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي 0 و 1 و 2 0.25

ب- بين أن $P(X=1) = \frac{8}{15}$ ثم حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X 1.25

التمرين الرابع (3 ن)

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_1 = 0$ و $u_{n+1} = \frac{25}{10 - u_n}$ لكل n من \mathbb{N}^*

(1) تحقق من أن $5 - u_{n+1} = \frac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)}$ لكل n من \mathbb{N}^* و بين بالترجع أن $5 - u_n > 0$ لكل n من \mathbb{N}^* 1

(2) نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $v_n = \frac{5}{5 - u_n}$ لكل n من \mathbb{N}^*

أ- بين أن $v_{n+1} = \frac{10 - u_n}{5 - u_n}$ لكل n من \mathbb{N}^* ثم تحقق من أن $v_{n+1} - v_n = 1$ لكل n من \mathbb{N}^* 0.75

ب- بين أن $v_n = n$ لكل n من \mathbb{N}^* و استنتج أن $u_n = 5 - \frac{5}{n}$ لكل n من \mathbb{N}^* 1

ج- حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ 0.25

التمرين الخامس (8 ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $f(x) = (x-2)^2 e^x$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد منظم (O, \vec{i}, \vec{j}) (الوحدة 1 cm)

(1) أ- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 0.25

ب- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ثم استنتج أن المنحنى (C) يقبل، بجوار $+\infty$ ، فرعا شلجيميا يتم تحديد اتجاهه. 0.5

(2) أ- تحقق من أن $f(x) = x^2 e^x - 4x e^x + 4e^x$ لكل x من \mathbb{R} 0.25

ب- بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و أول هذه النتيجة هندسيا (نذكر أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$ لكل n من \mathbb{N}^*) 0.5

(3) أ- بين أن $f'(x) = x(x-2)e^x$ لكل x من \mathbb{R} 0.75

ب- بين أن الدالة f تزايدية على كل من المجالين $]-\infty, 0]$ و $[2, +\infty[$ وأن الدالة f تناقصية على المجال $[0, 2]$ 1

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f على \mathbb{R} 0.5

(4) أ- بين أن $f''(x) = (x^2 - 2)e^x$ لكل x من \mathbb{R} ثم استنتج أن للمنحنى (C) نقطتي انعطاف تحديد أرتوبيهما 1

غير مطلوب .

ب- أنشئ (C) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) 1

(5) أ- بين أن $H : x \mapsto (x-1)e^x$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto x e^x$ على \mathbb{R} ثم احسب $\int_0^1 x e^x dx$ 0.5

ب- باستعمال كاملة بالأجزاء، بين أن : $\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2$ 0.75

ج- بين أن مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين 0.5

معدلتاهما $x=0$ و $x=1$ هي $5(e-2) \text{ cm}^2$

(6) استعمل المنحنى (C) لإعطاء عدد حلول المعادلة : $x^2 = e^{-x} + 4x - 4$ ، $x \in \mathbb{R}$ 0.5

أجوبة امتحان الدورة العادية 2013

التمرين الأول

1 أ

لدينا : $\begin{cases} A(-1; 1; 0) \\ B(1; 0; 1) \\ O(0; 0; 0) \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \overrightarrow{OA}(-1; 1; 0) \\ \overrightarrow{OB}(1; 0; 1) \end{cases}$

و منه : $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

لنكن $M(x; y; z)$ نقطة من المستوى (OAB) .
نعلم أن المتجهة $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ متجهة منظمية على المستوى (OAB)
إذن فهي عمودية على جميع متجهات المستوى (OAB)
إذن المتجهتان $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ و \overrightarrow{OM} متعامدان
يعني ، باستعمال الجداء السلمي : $\overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}) = 0$

أي : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ يعني : $x + y - z = 0$

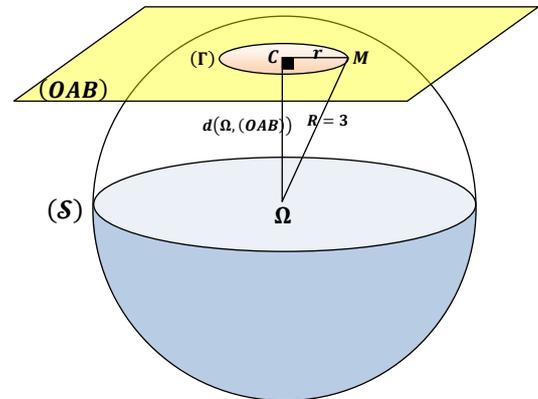
و هذه الكتابة الأخيرة تميز نقط المستوى (OAB)
إذن فهي معادلة ديكارتية للمستوى (OAB) .

1 ب

لدينا $\Omega(1; 1; -1)$ و $(OAB) : x + y - z = 0$

إذن : $d(\Omega, (OAB)) = \frac{|1 + 1 - (-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

و نعلم أن (S) فلكة مركزها Ω و شعاعها $R = 3$.
نلاحظ إذن أن : $\sqrt{3} < 3$ يعني : $d(\Omega, (OAB)) < \text{Rayon}(S)$
إذن المستوى (OAB) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) مركزها
 $C(\alpha; \beta; \gamma)$ و شعاعها r .
لتحديد قيمة الشعاع r نستعين بالشكل التالي :



من خلال هذا الشكل نلاحظ أن : $(\Omega C) \perp (OAB)$ إذن : $(\Omega C) \perp (CM)$
نستطيع إذن تطبيق مبرهنة فيثاغورس في ΩCM المثلث القائم الزاوية في C

إذن : $\Omega M^2 = \Omega C^2 + CM^2$
يعني : $3^2 = (\sqrt{3})^2 + r^2$ يعني : $r = \sqrt{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$

2 أ

ليكن (Δ) المستقيم المار من Ω و العمودي على المستوى (OAB) .
و لنكن $M(x; y; z)$ نقطة من (Δ) .
بما أن (Δ) عمودي على (OAB) و $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ منظمية على (OAB)
فإن أي متجهة موجهة لـ (Δ) تكون مستقيمة مع المتجهة $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$.
لدينا $\overrightarrow{\Omega M}$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ) .

إذن المتجهتان $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{\Omega M}$ مستقيمتان.
يعني : $(\exists t \in \mathbb{R}) ; \overrightarrow{\Omega M} = t(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB})$

أي : $(\exists t \in \mathbb{R}) ; \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

يعني : $(\Delta) : \begin{cases} x-1 = t \\ y-1 = t \\ z+1 = -t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

يعني : $(\Delta) : \begin{cases} x = t+1 \\ y = t+1 \\ z = -t-1 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) .

2 ب

بما أن (Δ) مار من Ω و عمودي على (OAB) فإن (Δ) و (ΩC) منطبقان
يعني : $C(\alpha; \beta; \gamma) \in (\Delta)$

و لدينا من جهة ثانية : $C(\alpha; \beta; \gamma) \in (OAB)$

نحصل إذن على النظمة التالية : $\begin{cases} C(\alpha; \beta; \gamma) \in (\Delta) \\ C(\alpha; \beta; \gamma) \in (OAB) \end{cases}$

و نعلم أن : $(\Delta) : \begin{cases} x = t+1 \\ y = t+1 \\ z = -t-1 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$
 $(OAB) : x + y - z = 0$

إذن نعوض x و y و z بالمجاهيل α و β و γ نجد : $\begin{cases} \alpha = 1+t \\ \beta = 1+t \\ \gamma = -1-t \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases}$

نعوض بعد ذلك α و β و γ بالتعابير التي تضم البارامتر t في آخر معادلة
نجد : $(1+t) + (1+t) - (-1-t) = 0$
و نحل هذه المعادلة الظرفية من الدرجة الأولى بمجهول واحد نجد :

$3t + 3 = 0$ أي : $t = -1$
نعوض t بالقيمة -1 في تعابير α و β و γ نجد : $\begin{cases} \alpha = 1-1 = 0 \\ \beta = 1-1 = 0 \\ \gamma = -1+1 = 0 \end{cases}$

إذن النقطة C التي نبحث عنها ما هي إلا أصل المعلم .
و بالتالي (Γ) دائرة مركزها O أصل المعلم .

التمرين الثاني

1 أ

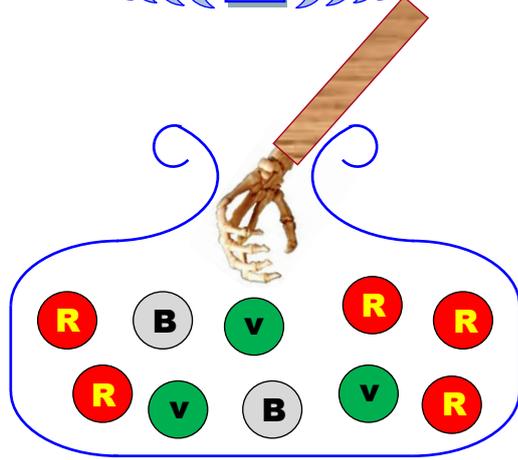
$(1+i)(-3+6i) = -3+6i-3i-6 = -9+3i$

الهدف من هذه المتساوية هو توظيفها أثناء حساب $\frac{c-a}{b-a}$

$\frac{c-a}{b-a} = \frac{(-2+5i)-(7+2i)}{(4+8i)-(7+2i)} = \frac{-9+3i}{-3+6i}$
 $= \frac{(1+i)(-3+6i)}{(-3+6i)} = (1+i)$

التمرين الثالث

1



عندما نسحب عشوائيا و في آن واحد أربع كرات من صندوق يحتوي على 10 كرات فإنه توجد C_{10}^4 نتيجة ممكنة .
يعني : $card(\Omega) = C_{10}^4 = 210$
بحيث Ω هو كون امكانيات هذه التجربة العشوائية .

$$p(A) = p \left(\begin{array}{l} \text{كرتان} \\ \text{حمران} \\ \text{و كرتان} \\ \text{خضراوين} \end{array} \right) = \frac{card \left(\begin{array}{l} \text{كرتان} \\ \text{حمران} \\ \text{و كرتان} \\ \text{خضراوين} \end{array} \right)}{card(\Omega)}$$

$$= \frac{C_5^2 \times C_3^2}{210} = \frac{10 \times 3}{210} = \frac{1}{7}$$

$$p(B) = p \left(\begin{array}{l} \text{لا توجد أية} \\ \text{كرة بيضاء} \\ \text{مما سحبناه} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{لا توجد أية} \\ \text{كرة بيضاء} \\ \text{مما سحبناه} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{توجد على الأقل} \\ \text{كرة بيضاء من} \\ \text{بين الكرات} \\ \text{الأربع المسحوبة} \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{l} \text{كرة بيضاء} \\ \text{واحدة و ثلاث} \\ \text{كرات غير ذلك} \end{array} \right) \text{ أو } \left(\begin{array}{l} \text{كرتان بيضاوين} \\ \text{و كرتان تخالفان} \\ \text{اللون الأبيض} \end{array} \right)$$

$$p \left(\begin{array}{l} \text{توجد على الأقل} \\ \text{كرة بيضاء من} \\ \text{بين الكرات} \\ \text{الأربع المسحوبة} \end{array} \right) = p \left(\begin{array}{l} \text{كرة بيضاء} \\ \text{واحدة و ثلاث} \\ \text{كرات غير ذلك} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{l} \text{كرتان بيضاوين} \\ \text{و كرتان تخالفان} \\ \text{اللون الأبيض} \end{array} \right)$$

$$= \frac{C_2^1 \times C_8^3}{210} + \frac{C_2^2 \times C_8^2}{210} = \frac{2 \times 56}{210} + \frac{28}{210} = \frac{2}{3}$$

$$p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

2

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة (يعني سحب أربع كرات في آن واحد) بعدد الكرات المسحوبة .

يضم الصندوق كرتين بيضاوين و 8 كرات تخالف اللون الأبيض .
إذن عندما نسحب في آن واحد أربع كرات فإنه يُحتمل الحصول على كرات كلها تخالف الأبيض ، أو الحصول على كرة بيضاء واحدة و الباقي يخالف الأبيض ، أو الحصول على كرتين بيضاوين و كرتين غير ذلك .
إذن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي هي : 0 و 1 و 2
أو بتعبير أجمل : $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

1 ب

$$\frac{c-a}{b-a} = 1+i \quad \text{إذن} \quad |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\frac{|c-a|}{|b-a|} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \quad \text{يعني}$$

$$|c-a| = \sqrt{2} \cdot |b-a| \quad \text{إذن}$$

$$AC = \sqrt{2} \cdot AB \quad \text{أي}$$

$$\frac{c-a}{b-a} = 1+i \quad \text{لدينا ، لجهة ثانية ،}$$

لنكتب العدد العقدي $(1+i)$ على الشكل المثلثي :

$$(1+i) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{c-a}{b-a} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{إذن}$$

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \arg\left(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}\right) [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \quad \text{يعني}$$

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \quad \text{أي}$$

$$\text{إذن قياس الزاوية الموجهة } \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \text{ هو } \frac{\pi}{4}$$

2 ا

$$\mathcal{R}_B \left(\frac{\pi}{2} \right) : (\mathcal{P}) \mapsto (\mathcal{P})$$

$$M(z) \mapsto M'(z')$$

ننتقل من المعطى : $\mathcal{R}(A) = D$

إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب :

$$(aff(D) - aff(B)) = e^{i\frac{\pi}{2}} (aff(A) - aff(B))$$

$$(d-b) = e^{i\frac{\pi}{2}} (a-b) \quad \text{يعني}$$

$$d-4-8i = i(7+2i-4-8i) \quad \text{يعني}$$

$$d = 7i-2-4i+8+4+8i \quad \text{يعني}$$

$$d = 10+11i \quad \text{أي}$$

2 ب

$$\frac{d-c}{b-c} = \frac{(10+11i) - (-2+5i)}{(4+8i) - (-2+5i)}$$

$$= \frac{12+6i}{6+3i} = \frac{2(6+3i)}{(6+3i)} = 2$$

$$(d-c) = 2(b-c) \quad \text{و منه} \quad \frac{d-c}{b-c} = 2 \quad \text{إذن}$$

و باستعمال المتجهات نكتب : $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CB}$

إذن النقط C و B و D نقط مستقيمية .

يمكن أن نجيب بطريقة أخرى مبينة كما يلي :

$$\arg\left(\frac{d-c}{b-c}\right) \equiv 0 [2\pi] \quad \text{إذن} \quad \frac{d-c}{b-c} = 2 \quad \text{لدينا}$$

$$\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}\right) \equiv 0 [2\pi] \quad \text{يعني}$$

إذن النقط C و B و D نقط مستقيمية .

2 أ

ليكن n عنصرا من \mathbb{N}^* . لدينا : $v_n = \frac{5}{5 - u_n}$

إذن : $v_{n+1} = \frac{5}{5 - u_{n+1}} = 5 \times \left(\frac{1}{5 - u_{n+1}} \right)$
 $= 5 \times \left(\frac{5 + (5 - u_n)}{5(5 - u_n)} \right) = \frac{5 + (5 - u_n)}{(5 - u_n)} = \frac{10 - u_n}{5 - u_n}$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_{n+1} = \frac{10 - u_n}{5 - u_n}$

ومنه : $v_{n+1} - v_n = \frac{10 - u_n}{5 - u_n} - \frac{5}{5 - u_n}$
 $= \frac{10 - u_n - 5}{5 - u_n} = \frac{5 - u_n}{5 - u_n} = 1$

2 ب

بما أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_{n+1} - v_n = 1$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_{n+1} = v_n + 1$

فإن : $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية حسابية أساسها 1.

إذن حددها العام v_n يكتب على الشكل :

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = v_1 + (n - 1)1$

لدينا : $v_1 = \frac{5}{5 - u_1} = \frac{5}{5 - 0} = 1$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = 1 + (n - 1)1$

أي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = n$

و بما أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = \frac{5}{5 - u_n}$

فإن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n = \frac{5}{5 - u_n}$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 5n - nu_n = 5$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; nu_n = 5n - 5$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = 5 - \frac{5}{n}$



2 ج

$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{5}{n} \right) = 5 - \frac{5}{\infty} = 5 - 0 = 5$

التمرين الخامس

1

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2)^2 e^x = (+\infty - 2)^2 e^{+\infty}$
 $= (+\infty) e^{+\infty} = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - 2)^2 e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2)^2 \left(\frac{e^x}{x} \right)$
 $= (+\infty)^2 \times (+\infty) = +\infty$

نحصل إذن على النهايتين التاليتين :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{cases}$$

و من هاتين النهايتين نستنتج أن (\mathcal{E}) يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأرتايب بجوار $+\infty$.

2 ب

لدينا الحدث $[X = 1]$ هو الحصول بالضبط على كرة بيضاء واحدة و ثلاث كرات مخالفة للون الأبيض .

إذن : $p[X = 1] = \frac{C_2^1 \times C_8^3}{210} = \frac{2 \times 56}{210} = \frac{8}{15}$

نقصد بقانون احتمال المتغير العشوائي X احتمال كل قيمة من قيم هذا المتغير العشوائي .

لدينا حسب السؤال (1) : $p(B) = \frac{1}{3}$ إذن : $p[X = 0] = \frac{1}{3}$

يكفي الآن أن نحسب $p[X = 2]$

الحدث $[X = 2]$ هو الحصول بالضبط على كرتين بيضاوين و كرتين تخالفين الأبيض

إذن : $p[X = 2] = \frac{C_2^2 \times C_8^2}{210} = \frac{28}{210} = \frac{2}{15}$

و بالتالي قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعروف بما يلي :

$P_X : \{0; 1; 2\} \mapsto [0; 1]$

$0 \mapsto P_X(0) = \frac{1}{3}$

$1 \mapsto P_X(1) = \frac{8}{15}$

$2 \mapsto P_X(2) = \frac{2}{15}$

و للتأكد من صحة الجواب يجب أن نتحقق من أن :

$P_X(0) + P_X(1) + P_X(2) = 1$

التمرين الرابع

1

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$. لدينا :

$5 - u_{n+1} = 5 - \frac{25}{10 - u_n} = \frac{50 - 5u_n - 25}{10 - u_n}$
 $= \frac{25 - 5u_n}{10 - u_n} = \frac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)}$

لنبين بالترجع صحة العبارة (P_n) المعرفة بما يلي :

$(P_n) : (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 5 - u_n > 0$

لدينا : $5 - u_n > 0$ يعني $5 - 0 > 0$

إذن العبارة (P_1) صحيحة .

نفترض أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 5 - u_n > 0$

إذن الكمية $(5 - u_n)$ كمية موجبة قطعاً .

و منه فإن الكميتان $5 + (5 - u_n)$ و $5(5 - u_n)$ موجبتان قطعاً .

إذن $\frac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)}$ كمية موجبة قطعاً باعتبارها خارج كميتين موجبتين قطعاً

أي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)} > 0$

أي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 5 - u_{n+1} > 0$

إذن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .



نحصل إذن على ما يلي :

$$\begin{cases} (P_1) \text{ est vraie} \\ (P_n) \text{ implique } (P_{n+1}) ; (\forall n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

إذن حسب مبدأ الترجع : $(P_n) \text{ est toujours vraie}$

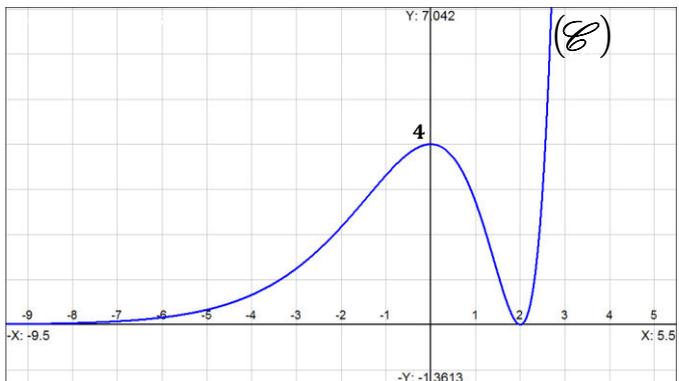
أي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 5 - u_n > 0$

4 أ

ليكن x عنصرا من \mathbb{R} . لدينا : $f'(x) = x(x-2)e^x$
 إذن : $f''(x) = (x-2)e^x + xe^x + x(x-2)e^x$
 ملاحظة : $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$
 و بالتالي : $f''(x) = (x^2-2)e^x$; $(\forall x \in \mathbb{R})$

و نعلم أن : $e^x > 0$; $(\forall x \in \mathbb{R})$
 إذن إشارة $f''(x)$ تتعلق فقط بإشارة (x^2-2) و نلاحظ أن يقبل
 نقطتي انعطاف أفصولا هما حلا المعادلة $x^2-2=0$
 يعني : $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$
 أي : $x = \sqrt{2}$ أو $x = -\sqrt{2}$.
 إذن المنحنى يقبل نقطتي انعطاف أفصولا هما $-\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$.

4 ب



5 أ

نعتبر الدالة H المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $H(x) = (x-1)e^x$
 نلاحظ أن H دالة متصلة على \mathbb{R} لأنها عبارة عن تشكيلة منسجمة
 من الدوال المتصلة على \mathbb{R} .

و لدينا : $H'(x) = ((x-2)e^x)'$
 $= e^x + (x-1)e^x = xe^x = h(x)$

إذن الدالة H دالة أصلية للدالة h على \mathbb{R} .

$$\int_0^1 \underbrace{x}_{u'} \underbrace{e^x}_{v'} dx = [uv]_0^1 - \int_0^1 u'v dx = [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1$$

$$= (e-0) - (e-1) = 1$$

5 ب

نحسب التكامل التالي باستعمال تقنية الكاملة بالأجزاء .

$$\int_0^1 \underbrace{x^2}_{u'} \underbrace{e^x}_{v'} dx = [x^2e^x]_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx$$

$$= [x^2e^x]_0^1 - 2 \int_0^1 xe^x dx$$

$$= (e-0) - 2 \times 1 = e-2$$

إذن : $\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2$

2 أ

ليكن x عنصرا من \mathbb{R} .
 $f(x) = (x-2)^2 e^x = (x^2 - 4x + 4)e^x$
 $= x^2 e^x - 4x e^x + 4e^x$

2 ب

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{x^2}_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{e^x}_{x \rightarrow -\infty} - 4 \underbrace{x}_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{e^x}_{x \rightarrow -\infty} + 4 \underbrace{e^x}_{x \rightarrow -\infty} = 0$$

محور الأفصايل مقارب أفقي للمنحنى (E) بجوار $-\infty$

ملاحظة : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = \begin{cases} 0^+ & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0^- & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

3 أ

ليكن x عنصرا من \mathbb{R} .
 لدينا : $f(x) = (x-2)^2 e^x$
 إذن : $f'(x) = 2(x-2)e^x + (x-2)^2 e^x$
 $= (x-2)e^x(2 + (x-2))$
 $= (x-2)xe^x$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = x(x-2)e^x$

3 ب



لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = x(x-2)e^x$
 نعلم أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x > 0$
 إذن إشارة $f'(x)$ تتعلق بإشارتي x و $(x-2)$
 و يُبيّن الجدول التالي إشارة $f'(x)$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
x	-	0	+	+	
$x-2$	-	-	0	+	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f		0	4	0	$+\infty$

إذن من خلال هذا الجدول نستنتج أن f تزايدية على كل من المجالين $]-\infty; 0]$ و $[2; +\infty[$ و تناقصية على المجال $[0; 2]$.



5

لتكن \mathcal{A} مساحة الجزء من المستوى المحصور بين المنحنى (\mathcal{C}) ومحور

الأفصائل و المستقيمين $x = 0$ و $x = 1$.
 نحسب \mathcal{A} باستعمال التكامل التالي : $\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x)| dx$

نعلم أن الدالة f تناقصية على $[0; 2]$.
 إذن فهي تناقصية على المجال $[0; 1]$.

إذا كان : $0 \leq x \leq 1$ فإن : $f(0) \geq f(x) \geq f(1)$

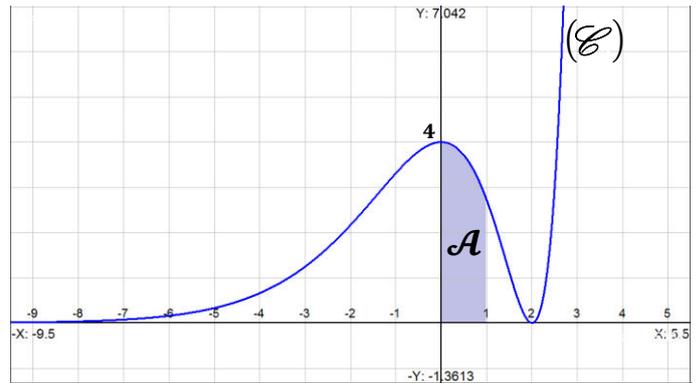
و منه : $4 \geq f(x) \geq e \geq 0$

إذن : $f(x)$ كمية موجبة قطعاً على المجال $[0; 1]$.

و منه : $\forall x \in [0; 1] ; |f(x)| = f(x)$

و بالرجوع إلى المساحة \mathcal{A} نكتب :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 f(x) dx \\ &= \int_0^1 (x^2 e^x - 4x e^x + 4e^x) dx \\ &= \int_0^1 x^2 e^x dx - 4 \int_0^1 x e^x dx + 4 \int_0^1 e^x dx \\ &= (e - 2) - 4 \times 1 + 4[e^x]_0^1 \\ &= (e - 2) - 4 + 4(e - 1) = 5e - 10 \\ &= 5(e - 2) \approx 3,59 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$



6

المعادلة : $x^2 = e^{-x} + 4x - 4$

تصبح : $x^2 - 4x + 4 = e^{-x}$

نضرب طرفي هذه المعادلة في الكمية الموجبة قطعاً e^{-x} نجد :

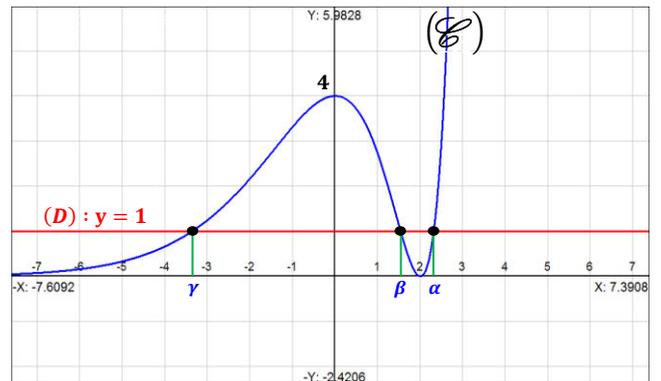
$$e^x (x^2 - e^{-x} - 4x + 4) = 0$$

يعني : $x^2 e^x - 4x e^x + 4e^x = 1$ يعني : $f(x) = 1$

إذن حلول هذه المعادلة الأخيرة هي أفصائل نقط تقاطع المنحنى (\mathcal{C})

و المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 1$.

و هو ما يُبينه الشكل التالي :



إذن : المعادلة تقبل ثلاثة حلول و هي α و β و γ .