



التمرين الأول: (3,5 ن)

الجزءان I و II مستقلان فيما بينهما .

لكل x و y من المجال $G =]1,2[$ نضع : $x * y = \frac{2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}$

بين أن * قانون تركيب داخلي في المجموعة G . 0,50 ن

نذكر أن (\mathbb{R}_+^*, \times) زمرة تبادلية 1 2 1

و نعتبر التطبيق f المعرف من \mathbb{R}_+^* نحو G بما يلي : $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$

بين أن f تشاكل تقابلي من (\mathbb{R}_+^*, \times) نحو $(G, *)$. 0,75 ن

استنتج أن $(G, *)$ زمرة تبادلية و حدد عنصرها المحايد . 0,50 ن

نذكر أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة صفرها : $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و وحدتها : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ II

و أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و نضع : $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

تحقق أن : $A^3 = O$ ثم استنتج أن A قاسم للصفر في الحلقة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ 0,50 ن

تحقق أن : $(A^2 - A + I)(A + I) = I$. 0,50 ن

ثم استنتج أن المصفوفة $(A + I)$ تقبل مقلوبا في $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ يتم تحديده .

لكل a و b من \mathbb{R} نضع : $M(a, b) = a \cdot I + b \cdot A$ 0,75 ن

و نعتبر المجموعة : $E = \{ M(a, b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \}$

بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و حدد أساسا له .

التمرين الثاني: (3 ن)

يحتوي صندوق على 3 كرات حمراء و 4 كرات سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس .

نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال 4 كرات من الصندوق و نعتبر المتغير العشوائي X الذي I

يساوي عدد الكرات السوداء المسحوبة من الصندوق .

حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X . 1,00 ن

أحسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X . 0,50 ن

نجز التجربة العشوائية التالية في ثلاث مراحل كالآتي : II

المرحلة الأولى : نسحب كرة من الصندوق ، نسجل لونها و نعيدها إلى الصندوق .

المرحلة الثانية : نضيف إلى الصندوق 5 كرات لها نفس لون الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى .

المرحلة الثالثة : نسحب بالتتابع و بدون إحلال 3 كرات من الصندوق الذي أصبح يحتوي على

12 كرة بعد المرحلة الثانية .

نعتبر الأحداث التالية :

- . { الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى سوداء } = N
. { الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى حمراء } = R
. { جميع الكرات المسحوبة في المرحلة الثالثة سوداء } = E

بين أن : $p(E \cap N) = \frac{12}{55}$ **1** ن 0,50

أحسب $p(E)$ **2** ن 0,50

أحسب احتمال الحدث R علما أن الحدث E قد تحقق . **3** ن 0,50



التمرين الثالث : (3,5 ن)

ليكن a عددا عقديا يخالف 1 . **1**

نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(E) : 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$$

بين أن : $z_1 = \frac{(a-1)(1+i)}{2}$ و $z_2 = \frac{(a-1)(1-i)}{2}$ هما حلتي المعادلة (E) . **1** ن 0,50

نأخذ $a = e^{i\theta}$ حيث $0 < \theta < \pi$. **2** **1**

بين أن : $a - 1 = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)}$ **2** **1** ن 0,50

استنتج الشكل المثلثي لكل من z_1 و z_2 . **2** **1** ن 1,00

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\sigma, \vec{u}, \vec{v})$. **11**

نفترض أن $\Re(a) < 0$ و نعتبر النقط $A(a)$ و $B(-i)$ و $C(i)$ و $B'(1)$.

حدد لحقي كل من J و K منتصفتي القطعتين $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي بدلالة a . **1** **11** ن 0,50

ليكن r_1 الدوران الذي مركزه J و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$ و r_2 الدوران الذي مركزه K و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$. **2** **11** ن 0,50

نضع : $C' = r_1(C)$ و $A' = r_2(A)$.

و ليكن c' لحق C' و a' لحق A' . بين أن : $a' = z_1$ و $c' = z_2$.

أحسب $\left(\frac{a'-c'}{a-1}\right)$ ثم استنتج أن المستقيم (AB') ارتفاع في المثلث $A'B'C'$. **3** **11** ن 0,50

التمرين الرابع : (8,25 ن)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي : **1**

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(x \ln x)^2}} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

بين أن الدالة f متصلة على اليمين في النقطة 0 ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ **1** **1** ن 0,50

أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في النقطة 0 (يمكنك استعمال النتيجة $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0$) **1** **1** ن 0,50

بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$. و أن مشتقتها معرفة بـ : **1** **1** ن 0,50

$$(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{-x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + (x \ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ضع جدول تغيرات الدالة f . **1** **1** ن 0,50

تكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ **2**

و ليكن (\mathcal{E}_F) المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم $(\sigma, \vec{i}, \vec{j})$.

حدد دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ على المجال $[e, +\infty[$. **أ** **2** 0,25 ن

بين أن : $(\forall t \geq e) ; t \ln t < \sqrt{1 + (t \ln t)^2} < \sqrt{2} t \ln t$ **ب** **2** 0,50 ن

بين أن : $(\forall t \geq e) ; \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + (t \ln t)^2}} dt < \ln(\ln x)$ **ج** **2** 0,75 ن

استنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ و أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$ **د** **2** 0,50 ن

بين أن (\mathcal{E}_F) يقبل نقطتي انعطاف المطلوب تحديد أفصول كل واحدة منهما . **هـ** **2** 0,50 ن

أنشئ (\mathcal{E}_F) (نأخذ من أجل ذلك $F(1) \approx 0,5$ و $F\left(\frac{1}{e}\right) \approx 0,4$) **ز** **2** 1,00 ن

لكل x من المجال $[0, +\infty[$ نضع : $\varphi(x) = x - F(x)$ **3**

بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$ ثم ادرس تغيرات الدالة φ . **أ** **3** 0,75 ن

بين أنه لكل n من \mathbb{N} ، المعادلة $\varphi(x) = n$ تقبل حلا وحيدا α_n في المجال $[0, +\infty[$. **ب** **3** 0,50 ن

بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \alpha_n \geq n$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ **ج** **3** 0,50 ن

بين أن : $(\forall n \geq 1) ; 0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n} + f(n)$ **أ** **4** 0,50 ن

(من أجل ذلك يمكن استعمال مبرهنة التزايد المتناهية)

أحسب النهاية : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha_n}{n}\right)$ **ب** **4** 0,50 ن

التمرين الخامس : (1,75 ن)



لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n = \left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)}\right)^{n^2}$ و $v_n = \ln(u_n)$

تحقق أن : $(\forall n \geq 1) ; v_n = n^2 [\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1))]$ **1** 0,25 ن

باستعمال مبرهنة التزايد المتناهية بين أن : **2** 0,50 ن

$(\forall n \geq 1) , (\exists c \in]n ; n+1[) ; v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$

بين أن : $(\forall n \geq 1) ; \frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)} < v_n < \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)}$ **3** 0,50 ن

أحسب النهاية : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ **4** 0,50 ن