التمرين الأول : (3,5 ن)

نذكر أن $(\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة واحدية تبادلية و كاملة .

1 نزود $\mathbb{Z}$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي : $\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2 \;;\; x*y = x+y-2$

1 أ بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي . — 0,50 ن

1 ب بين أن : $(\mathbb{Z},*)$ تقبل عنصرا محايدا يتم تحديده . — 0,25 ن

1 ج بين أن : $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبادلية . — 0,50 ن

2 نزود $\mathbb{Z}$ بقانون التركيب الداخلي $\top$ المعرف بـ : $\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2 \;;\; x\top y = xy-2x-2y+6$

و نعتبر التطبيق f من $\mathbb{Z}$ نحو $\mathbb{Z}$ المعرف بما يلي : $(\forall x\in\mathbb{Z}) \;;\; f(x) = x+2$

2 أ بين أن التطبيق f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\top)$. — 0,50 ن

2 ب بين أن : $\forall\,(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3 \;;\; (x*y)\top z = (x\top z)*(y\top z)$ — 0,25 ن

3 إستنتج من كل ما سبق أن : $(\mathbb{Z},*,\top)$ حلقة تبادلية و واحدية . — 0,75 ن

4 أ بين أن : $x\top y = 2$ إذا وفقط إذا كان $x=2$ أو $y=2$. — 0,25 ن

4 ب استنتج أن الحلقة $(\mathbb{Z},*,\top)$ كاملة . — 0,25 ن

4 ج هل $(\mathbb{Z},*,\top)$ جسم ؟ (علل الجواب) — 0,25 ن

التمرين الثاني : (3,5 ن)

I ليكن a عددا عقديا غير منعدم .

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$(E):\ 2z^2-(3+i\sqrt{3})az+(1+i\sqrt{3})a^2=0$$

I 1 تحقق أن مميز المعادلة (E) هو : $(-1+i\sqrt{3})^2a^2$. — 0,25 ن

I 2 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) . — 0,50 ن

II المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط A و B و M التي ألحاقها على التوالي : a و $b=ae^{\frac{i\pi}{3}}$ و z .

ليكن r الدوران الذي مركزه M و زاويته $\frac{\pi}{3}$. نضع : $A_1=r^{-1}(A)$ و $B_1=r(B)$

(حيث r^{-1} هو الدوران العكسي للدوران r)

ليكن a_1 و b_1 لحقي A_1 و B_1 على التوالي .

II 1 تحقق أن المثلث OAB متساوي الأضلاع . — 0,50 ن

II 2 أ بين أن : $a_1=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ و $b_1=\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ — 0,50 ن

II 2 ب بين أن الرباعي OA_1MB_1 متوازي أضلاع . — 0,50 ن

| II | 3 | أ | نفترض أن $M \neq A$ و $M \neq B$ بين أن : $\dfrac{z-b_1}{z-a_1} = -\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right) \times \dfrac{a}{b}$ | 0,50 ن |
| II | 3 | ب | بين أن النقط M و A_1 و B_1 مستقيمية إذا و فقط إذا كانت النقط M و O و A و B متداورة . | 0,75 ن |

التمرين الثالث : (3 ن)

الهدف من التمرين هو البحث عن الأعداد الصحيحة الطبيعية n الأكبر قطعا من 1 و التي تحقق الخاصية $(\mathfrak{R})$ التالية : $(\mathfrak{R}) : \; 3^n - 2^n \equiv 0 \; [n]$.

1. نفترض أن n يحقق الخاصية $(\mathfrak{R})$. و ليكن p أصغر قاسم أولي موجب للعدد n .

1	أ	بين أن : $3^n - 2^n \equiv 0 \; [p]$ ثم استنتج أن $p \geq 5$.	0,75 ن
1	ب	بين أن : $2^{p-1} \equiv 1 [p]$ و $3^{p-1} \equiv 1 [p]$.	0,50 ن
1	ج	بين أنه يوجد زوج (a,b) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $an - b(p-1) = 1$.	0,50 ن
1	د	ليكن r و q باقي و خارج القسمة الأقليدية للعدد a على $(p-1)$. (يعني : $a = q(p-1) + r$ حيث : $0 \leq r < p-1$ و $q \epsilon \mathbb{Z}$) بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم k بحيث : $rn = 1 + k(p-1)$.	0,50 ن
2		إستنتج من كل ما سبق أنه لا يوجد عدد صحيح طبيعي n أكبر قطعا من 1 و يحقق الخاصية $(\mathfrak{R})$.	0,75 ن

التمرين الرابع : (10 ن)

الجزء الأول

نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{x-1}{x \ln x} \; ; \; (\forall x > 1) \\ h(1) = 1 \end{cases}$$

1	أ	بين أن الدالة h متصلة على اليمين في 1 .	0,25 ن
1	ب	بين أن : $(\forall x > 1) \, ; \ln x < x - 1$ ثم استنتج أن h تناقصية قطعا على المجال $]1;+\infty[$.	0,75 ن
2	أ	أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة h .	0,50 ن
2	ب	استنتج أن : $(\forall x \geq 1) \; ; \; 0 < h(x) \leq 1$.	0,25 ن

الجزء الثاني

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt \; ; \; (\forall x > 1) \\ g(1) = \ln 2 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة g في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1	أ	تحقق أن : $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \ln 2 \; ; \; (\forall x > 1)$	0,25 ن
1	ب	تحقق أن : $\displaystyle g(x) - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t} - 1}{t \ln t} dt \; ; \; (\forall x > 1)$	0,25 ن
1	ج	بين أن : $\displaystyle g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^{x} \left(\frac{t-1}{t \ln t}\right) dt \; ; \; (\forall x > 1)$	0,50 ن
2	أ	بين أن : $(x - \sqrt{x}) h(\sqrt{x}) \leq g(x) - \ln 2 \leq (x - \sqrt{x}) h(x) \; ; \; (\forall x > 1)$	0,50 ن

0,50 ن | 2 | ب | استنتج أن الدالة g قابلة للإشتقاق على اليمين في 1 .

0,75 ن | 2 | ج | بين أن : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ و أن : $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 0$

0,75 ن | 3 | أ | بين أن g قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$. و أن : $(\forall x > 1)\ ;\ g'(x) = \frac{1}{2}h(\sqrt{x})$

0,50 ن | 3 | ب | استنتج أن : $(\forall x \geq 1)\ ;\ 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g .

0,50 ن | 3 | ج | أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$.

الجزء الثالث

0,50 ن | I | 1 | بين أن الدالة : $k : x \longmapsto g(x) - x + 1$ تقابل من $[1;+\infty[$ نحو $]-\infty;\ln 2]$.

0,25 ن | I | 2 | استنتج أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1;+\infty[$ بحيث : $1 + g(\alpha) = \alpha$.

II | نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1 + g(u_n)\ ;\ (\forall n \geq 0) \\ 1 \leq u_0 < \alpha \end{cases}$$

0,50 ن | II | 1 | أ | بين أن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ 1 \leq u_n < \alpha$

0,50 ن | II | 1 | ب | بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا .

0,75 ن | II | 1 | ج | استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة . و أن : $\lim_{n\infty} u_n = \alpha$

0,50 ن | II | 2 | أ | بين أن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}\ |u_n - \alpha|$

0,50 ن | II | 2 | ب | بين أن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ |u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\ |u_0 - \alpha|$

0,25 ن | II | 2 | ج | استنتج مرة ثانية أن : $\lim_{n\infty} u_n = \alpha$

التمرين الأول

1 أ

المجموعة $\mathbb{Z}$ مزودة بالقانون $*$ المعرف بما يلي :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{Z}^2 \ ;\ x*y = x+y-2$$

لدينا $*$ قانون تركيب داخلي لأنه إذا كان x و y عنصرين من $\mathbb{Z}$ فإن $(x+y-2)\in\mathbb{Z}$

لنبرهن على أن $*$ تبادلي :

من أجل ذلك يكفي أن نلاحظ أن القانون $+$ تبادلي في الحلقة الواحدية التبادلية $(\mathbb{Z},+,\times)$

إذن : $\forall (x,y)\in\mathbb{Z}^2 \ ;\ x*y = x+y-2 = y+x-2 = y*x$

إذن $*$ تبادلي في $\mathbb{Z}$.

لنبرهن على أن القانون $*$ تجميعي في $\mathbb{Z}$.

لتكن x و y و z ثلاثة عناصر من $\mathbb{Z}$

لدينا :
$$\begin{aligned}(x*y)*z &= (x*y)+z-2 = x+y-2+z-2\\ &= x+(y+z-2)-2\\ &= x+(y*z)-2\\ &= x*(y*z)\end{aligned}$$

إذن : $\forall (x,y,z)\in\mathbb{Z}^2 \ ;\ (x*y)*z = x*(y*z)$

و منه فإن القانون $*$ تجميعي في المجموعة $\mathbb{Z}$.

1 ب

ليكن ε العنصر المحايد للقانون $*$ في المجموعة $\mathbb{Z}$.

إذن : $(\forall x\in\mathbb{Z}) \ ;\ x*\varepsilon = \varepsilon*x = x$

لتحديد قيمة ε ننطلق من التعبير : $x*\varepsilon = x$

إذن : $x+\varepsilon-2 = x$ و منه : $\varepsilon = 2\in\mathbb{Z}$

إذن 2 هو العنصر المحايد للقانون $*$ في $\mathbb{Z}$.

1 ج

لكي تكون $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبادلية يكفي أن نبرهن على أن كل عنصر من $\mathbb{Z}$ يقبل مماثلا من $\mathbb{Z}$ بالقانون $*$.

ليكن x عنصرا من $\mathbb{Z}$. و x' مماثله بالنسبة للقانون $*$.

إذن : $x*x' = x'*x = 2$

ننطلق من المتساوية التالية : $x*x' = 2$

إذن : $x+x'-2 = 2$ يعني : $x' = 4-x$

بما أن $x\in\mathbb{Z}$ و $4\in\mathbb{Z}$ فإن : $(4-x)\in\mathbb{Z}$

و بالتالي : كل عنصر x من $\mathbb{Z}$ يقبل مماثلا في $\mathbb{Z}$ و هو $(4-x)$.

خلاصة : لقد حصلنا على المعلومات التالية :

- $*$ داخلي و تبادلي و تجميعي في $\mathbb{Z}$.
- $*$ يقبل عنصرا محايدا و هو 2 .
- كل عنصر x من $\mathbb{Z}$ يمتلك مماثلا و هو $(4-x)$.

إذن : $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبادلية .

2 أ

نعتبر التطبيق f المعرف بما يلي :
$$\begin{aligned} f : (\mathbb{Z},\times) &\mapsto (\mathbb{Z},\top)\\ x &\mapsto f(x) = x+2\end{aligned}$$

لكي يكون f تشاكلا يكفي أن يحقق ما يلي :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{Z}^2 \ ;\ f(x\times y) = f(x)\top f(y)$$

ليكن x و y عنصرين من المجموعة $\mathbb{Z}$.

لدينا :
$$\begin{aligned} f(x)\top f(y) &= (x+2)\top(y+2)\\ &= (x+2)(y+2)-2(x+2)-2(y+2)+6\\ &= xy-2 = f(x\times y)\end{aligned}$$

إذن f تشاكل من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\top)$.

لكي يكون f تقابلا يكفي أن يحقق ما يلي :

$$(\forall y\in\mathbb{Z}),(\exists!\, x\in\mathbb{Z}) \ ;\ f(x) = y$$

يعني : المعادلة $f(x)=y$ ذات المجهول x تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{Z}$.

ليكن y عنصرا من المجموعة $\mathbb{Z}$. لدينا :
$$\begin{aligned} f(x)=y &\Leftrightarrow x+2=y\\ &\Leftrightarrow x=y-2\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

إذن : $(\forall y\in\mathbb{Z}),(\exists!\, x=y-2\in\mathbb{Z}) \ ;\ f(x)=y$

و هذا يعني أن التطبيق f تقابل من $\mathbb{Z}$ نحو $\mathbb{Z}$.

خلاصة : f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\top)$.

2 ب

لتكن x و y و z ثلاثة أعداد نسبية ، لدينا من جهة أولى :

$$\begin{aligned}(x*y)\top z &= (x*y)z-2(x*y)-2z+6\\ &= (x+y-2)z-2(x+y-2)-2z+6\\ &= xz+yz-4z-2x-2y-2z+10\end{aligned}$$

و من جهة ثانية لدينا :
$$\begin{aligned}(x\top z)*(y\top z) &= (x\top z)+(y\top z)-2\\ &= (xz-2x-2z+6)+(yz-2y-2z+6)-2\\ &= xz+yz-4z-2x-2y-2z+10\end{aligned}$$

نستنتج أن : $\forall (x,y,z)\in\mathbb{Z}^3 \ ;\ (x*y)\top z = (x\top z)*(y\top z)$

أي : القانون $\top$ توزيعي على $*$ في $\mathbb{Z}$.

3

لنبين أن : $(\mathbb{Z},*,\top)$ **حلقة** **تبادلية** و **واحدية**

- $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبادلية
- $\top$ قانون تجميعي
- $\top$ توزيعي على $*$

- $\top$ يقبل عنصرا محايدا في $\mathbb{Z}$

- $\top$ تبادلي في $\mathbb{Z}$

حصلنا من خلال الأجوبة السابقة على المعلومتين التاليتين :

$\boxed{(\mathbb{Z},*)\ \text{زمرة تبادلية}}$ (1) و $\boxed{\text{القانون } \top \text{ توزيعي على القانون } *}$ (2)

لدينا f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\top)$

إذن نستنتج البنية الجبرية للمجموعة $(\mathbb{Z},\top)$ انطلاقا من البنية الجبرية للمجموعة $(\mathbb{Z},\times)$ و ذلك عن طريق التطبيق f .

لأنه و كما نعلم : التشاكل التقابلي يُحوِّل البنية الجبرية لمجموعة الأنطلاق إلى مجموعة الوصول.

بما أن الضرب $\times$ تبادلي و تجميعي في $(\mathbb{Z},\times)$ و يقبل 1 كَعُنصر محايد.

فإن : $\boxed{\text{القانون } \top \text{ تبادلي في } \mathbb{Z}}$ (3) و $\boxed{\top \text{ قانون تجميعي في } \mathbb{Z}}$ (4)

و $\boxed{f(1)=3 \ \text{عنصر محايد للقانون } \top \text{ في } \mathbb{Z}}$ (5).

إذن من النتائج (1) و (2) و (3) و (4) و (5) نستنتج أن $(\mathbb{Z},*,\top)$ حلقة تبادلية و واحدية وحدتها العدد النسبي 3 .

4 أ

ليكن x و y عنصرين من المجموعة $\mathbb{Z}$. لدينا :

$$\begin{aligned} x\top y = 2 &\Leftrightarrow xy-2x-2y+6=2\\ &\Leftrightarrow xy-2x-2y+4=0\\ &\Leftrightarrow x(y-2)-2(y-2)=0\\ &\Leftrightarrow (y-2)(x-2)=0\\ &\Leftrightarrow (y-2)=0 \ \text{أو}\ (x-2)=0\\ &\Leftrightarrow y=2 \ \text{أو}\ x=2\end{aligned}$$

4 ب

تكون الحلقة $(\mathbb{Z},\top,*)$ كاملة إذا كانت لا تحتوي على قواسم للصفر .
ليكن x قاسما للصفر في $(\mathbb{Z},\top,*)$.
إذن : $\exists\, y \in \mathbb{Z}\backslash\{2\} \;;\; x \top y = y \top x = 2$
و منه حسب نتيجة السؤال 4) أ) : $x = 2$ أو $y = 2$
إذن لا وجود لأي قاسم للصفر لأن قواسم الصفر إن وجدت يجب أن تخالف العنصر المحايد 2 و بالتالي $(\mathbb{Z},\top,*)$ حلقة كاملة .

4 ج

تكون الحلقة الواحدية $(\mathbb{Z},\top,*)$ جسما إذا كان كل عنصر من $\mathbb{Z}\backslash\{2\}$ يقبل مماثلا (أو مقلوبا) في $(\mathbb{Z},\top)$.
و لذلك نحدد أولا الصيغة العامة لمماثل عنصر x من $\mathbb{Z}$ بالقانون $\top$.
ليكن y مماثل x بالنسبة للقانون $\top$. إذن :

$$\begin{aligned} x \top y = 3 &\Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 6 = 3 \\ &\Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow y(x-2) = (2x-3) \\ &\Leftrightarrow y = \left(\frac{2x-3}{x-2}\right) \end{aligned}$$

و نلاحظ أن الكمية $\left(\frac{2x-3}{x-2}\right)$ ليست دائما عنصرا من $\mathbb{Z}$.
العنصر $1 \in \mathbb{Z}$ مثلا هو مماثل 1 بالنسبة لـ $\top$
و العنصر $3 \in \mathbb{Z}$ مثلا هو مماثل 3 بالنسبة لـ $\top$
لكن العنصر $\frac{11}{5} \notin \mathbb{Z}$ هو مماثل 7 بالنسبة للقانون $\top$.
إذن توجد عناصر من $\mathbb{Z}$ لا تقبل مماثلا في $\mathbb{Z}$ بالنسبة لـ $\top$.
و بالتالي فالحلقة $(\mathbb{Z},\top,*)$ ليست جسما .

التمرين الثاني

I 1

لدينا من جهة أولى :

$$\begin{aligned} \Delta &= a^2\left(3+i\sqrt{3}\right)^2 - 8a^2\left(1+i\sqrt{3}\right) \\ &= a^2\left(6+6i\sqrt{3}\right) - 8a^2\left(1+i\sqrt{3}\right) \\ &= 6a^2\left(1+i\sqrt{3}\right) - 8a^2\left(1+i\sqrt{3}\right) \\ &= \boxed{-2a^2\left(1+i\sqrt{3}\right)} \;(1) \end{aligned}$$

و من جهة ثانية لدينا :

$$\begin{aligned} a^2\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2 &= a^2\left(1-3-2i\sqrt{3}\right) \\ &= a^2\left(-2-2i\sqrt{3}\right) \\ &= \boxed{-2a^2\left(1+i\sqrt{3}\right)} \;(2) \end{aligned}$$

نستنتج إذن من (1) و (2) أن : $\Delta = a^2\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2$

I 2

لدينا : $\Delta = a^2\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2$
إذن : المعادلة (E) تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 معرفين بما يلي :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\left(3+i\sqrt{3}\right)a - \left(-1+i\sqrt{3}\right)a}{4} \\ &= \frac{3a + i\sqrt{3}a + a - i\sqrt{3}a}{4} = \frac{4a}{4} = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{\left(3+i\sqrt{3}\right)a + \left(-1+i\sqrt{3}\right)a}{4} \\ &= \frac{3a + i\sqrt{3}a - a + i\sqrt{3}a}{4} = \frac{2a + 2i\sqrt{3}a}{4} = \frac{a\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2} \end{aligned}$$

II 1

أقترح طريقتين في الجواب .

الطريقة الأولى :

لدينا :

$$\frac{aff(A) - aff(O)}{aff(B) - aff(O)} = \frac{a - 0}{ae^{\frac{i\pi}{3}} - 0} = e^{\frac{-i\pi}{3}}$$

إذن :

$$\begin{cases} \dfrac{OA}{OB} = 1 \\ \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{3}\; [2\pi] \end{cases}$$

يعني :

$$\begin{cases} OA = OB \\ \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{3}\; [2\pi] \end{cases}$$

إذن :

$$\begin{cases} \left|\dfrac{aff(A) - aff(O)}{aff(B) - aff(O)}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{aff(A) - aff(O)}{aff(B) - aff(O)}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{3}\; [2\pi] \end{cases}$$

و هذا يعني أن المثلث OAB متساوي الساقين رأسه O و قياس إحدى زواياه و هي الزاوية $\widehat{O}$ يساوي $60°$.
إذن : OAB مثلث متساوي الأضلاع .

الطريقة الثانية :

لدينا : $OA = |aff(A) - aff(O)| = |a - 0| = |a|$

و لدينا :

$$\begin{aligned} OB &= |aff(B) - aff(O)| \\ &= |b - 0| = \left|ae^{\frac{i\pi}{3}}\right| = |a| \end{aligned}$$

و كذلك :

$$\begin{aligned} AB &= |aff(B) - aff(A)| = |b - a| \\ &= \left|ae^{\frac{i\pi}{3}} - a\right| = \left|a\left(e^{\frac{i\pi}{3}} - 1\right)\right| = |a| \cdot \left|e^{\frac{i\pi}{3}} - 1\right| \\ &= |a| \cdot \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right| = |a| \cdot \left|\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = |a| \end{aligned}$$

نستنتج إذن أن : $OA = OB = AB$ و $A \neq B \neq C$
إذن OAB مثلث متساوي الأضلاع .

II 2 أ

لدينا r دوران مُعَرف بما يلي :

$$(\mathcal{P}) \xrightarrow{r_M\left(\frac{\pi}{3}\right)} (\mathcal{P})$$

ننطلق من الكتابة : $A_1 = r^{-1}(A)$ إذن : $r(A_1) = A$
و منه حسب التعريف العقدي للدوران r نكتب :

$$\left(aff(A) - aff(M)\right) = e^{\frac{i\pi}{3}}\left(aff(A_1) - aff(M)\right)$$

يعني : $(a - z) = e^{\frac{i\pi}{3}}(a_1 - z)$

يعني : $(a - z) = e^{\frac{i\pi}{3}}a_1 - e^{\frac{i\pi}{3}}z$

يعني : $e^{\frac{i\pi}{3}}a_1 = a - z + e^{\frac{i\pi}{3}}z$

يعني : $a_1 = e^{\frac{-i\pi}{3}}\left(a - z + e^{\frac{i\pi}{3}}z\right)$

يعني : $a_1 = e^{\frac{-i\pi}{3}}a - e^{\frac{-i\pi}{3}}z + z$

من جهة أخرى لدينا :

$$\begin{aligned} e^{\frac{-i\pi}{3}} &= \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

إذن : $a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + z$

$$= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

$$= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

و بنفس الطريقة ننطلق من الكتابة $r(B) = B_1$.

إذن حسب التعريف العقدي للدوران r نكتب :

$$\left(aff(B_1) - aff(M)\right) = e^{\frac{i\pi}{3}}\left(aff(B) - aff(M)\right)$$

يعني : $(b_1 - z) = e^{\frac{i\pi}{3}}\left(ae^{\frac{i\pi}{3}} - z\right)$

يعني : $b_1 = ae^{\frac{2i\pi}{3}} - e^{\frac{i\pi}{3}}z + z$

و لدينا : $e^{\frac{2i\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

و نضيف كذلك : $e^{\frac{i\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن بالرجوع إلى آخر تعبير لـ b_1 نَكتب :

$$b_1 = ae^{\frac{2i\pi}{3}} - e^{\frac{i\pi}{3}}z + z = ae^{\frac{2i\pi}{3}} + \left(1 - e^{\frac{i\pi}{3}}\right)z$$

$$= \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

$$= \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

II 2 ب

بصفة عامة ، لكي نبرهن على أن رباعيا ما متوازي أضلاع ، توجد عدة طرق من بينها : القطران لهما نفس المنتصف و صيغة التوازي و الصيغة المتجهية و صيغة التقايس . لكن أرى أن أسهل طريقة في هذا السؤال هي أن نبرهن أن كل ضلعين متقابلين متقايسان . لأن المسافة في المستوى العقدي ما هي إلا معيار لعدد عقدي .

لنبرهن أن : $OA_1 = B_1M$ و $OB_1 = A_1M$

لدينا : $OA_1 = |aff(A_1) - aff(O)| = |a_1|$

و لدينا : $B_1M = |aff(M) - aff(B_1)| = |z - b_1|$

$$= \left|z - \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z\right|$$

$$= \left|\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z\right|$$

$$= \left|\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z\right| = |a_1|$$

إذن : $\boxed{OA_1 = B_1M}$ (1)

و بنفس الطريقة لدينا : $OB_1 = |aff(B_1) - aff(O)| = |b_1|$

و لدينا كذلك : $A_1M = |aff(M) - aff(A_1)| = |z - a_1|$

$$= \left|z - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z\right|$$

$$= \left|\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z\right|$$

$$= \left|\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z\right| = |b_1|$$

إذن : $\boxed{OB_1 = A_1M}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن كل ضلعين متقابلين في الرباعي OA_1MB_1 متقايسان . إذن : OA_1MB_1 متوازي أضلاع

II 3 أ

أقترح طريقتين في الجواب .

الطريقة الأولى :

لدينا : $b = ae^{\frac{i\pi}{3}}$ إذن : $\frac{b}{a} = e^{\frac{i\pi}{3}}$

و منه : $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^3 = e^{i\pi} = -1$ يعني : $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = -1$

و منه : $\left(\frac{b}{a}\right)^2 \times \left(\frac{b}{a}\right) = -1$ يعني : $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = -\left(\frac{a}{b}\right)$

و منه : $e^{\frac{2i\pi}{3}} = \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = -\left(\frac{a}{b}\right)$ إذن : $\boxed{e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\left(\frac{a}{b}\right)}$

نوظف بعد ذلك هذه المتساوية فيما سيأتي :

لدينا : $\begin{cases} r(A_1) = A \\ r(B) = B_1 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} (a - z) = e^{\frac{i\pi}{3}}(a_1 - z) \\ (b_1 - z) = e^{\frac{i\pi}{3}}(b - z) \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} (z - a_1) = e^{\frac{-i\pi}{3}}(z - a) \\ (z - b_1) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z - b) \end{cases}$

أي : $\left(\frac{z - b_1}{z - a_1}\right) = \left(\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{e^{\frac{-i\pi}{3}}}\right)\left(\frac{z - b}{z - a}\right)$

يعني : $\left(\frac{z - b_1}{z - a_1}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}}\left(\frac{z - b}{z - a}\right)$

يعني : $\boxed{\left(\frac{z - b_1}{z - a_1}\right) = \frac{-a}{b}\left(\frac{z - b}{z - a}\right)}$

بإمكاننا أن نجيب دون استعمال المعطيين $r(A_1) = A$ و $r(B) = B_1$

و هذا ما سوف أعرضه الآن كطريقة أخرى للجواب .

الطريقة الثانية :

لدينا : $b = ae^{\frac{i\pi}{3}}$ إذن : $\frac{b}{a} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ و $\frac{a}{b} = e^{\frac{-i\pi}{3}}$

و من هاتين الكتابتين نستنتج ما يلي :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = e^{\frac{-i\pi}{3}} + e^{\frac{i\pi}{3}} = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1$$

إذن : $\boxed{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1}$

و لدينا كذلك : $\frac{b}{a} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ إذن : $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^3 = e^{i\pi} = -1$

إذن : $\boxed{\left(\frac{b}{a}\right)^3 = -1}$

و من هذه النتيجة نكتب : $\left(\frac{b}{a}\right)^2 \times \left(\frac{b}{a}\right) = -1$

يعني : $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = -\left(\frac{a}{b}\right)$

نحن الآن مُسَلَحون بمتساويتين ثمينتين :

$$(1)\quad \boxed{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=1} \quad \text{و} \quad \boxed{\left(\frac{b}{a}\right)^2 = -\left(\frac{a}{b}\right)} \quad (2)$$

ننطلق إذن من نتيجتي السؤال 2) أ) و نوظف المتساوية (1) :

$$\begin{cases} a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z \\ b_1 = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = e^{\frac{-i\pi}{3}}a + e^{\frac{i\pi}{3}}z \\ b_1 = -e^{\frac{-i\pi}{3}}a + e^{\frac{-i\pi}{3}}z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \left(\frac{a}{b}\right)a + \left(\frac{b}{a}\right)z \\ b_1 = -\left(\frac{a}{b}\right)a + \left(\frac{a}{b}\right)z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{a^2}{b} + \frac{bz}{a} \\ b_1 = \frac{-a^2}{b} + \frac{az}{b} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - a_1 = z - \frac{a^2}{b} - \frac{bz}{a} \\ z - b_1 = z + \frac{a^2}{b} - \frac{az}{b} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - a_1 = \frac{-a^2}{b} + \left(1 - \frac{b}{a}\right)z \\ z - b_1 = \frac{a^2}{b} + \left(1 - \frac{a}{b}\right)z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - a_1 = \frac{-a^2}{b} + \left(\frac{a}{b}\right)z \\ z - b_1 = \frac{a^2}{b} + \left(\frac{b}{a}\right)z \end{cases}$$

فيما يلي سوف نوظف المتساوية الثمينة (2) :

$$\Leftrightarrow \frac{z-b_1}{z-a_1} = \frac{\frac{a^2}{b}+\frac{bz}{a}}{\frac{-a^2}{b}+\frac{az}{b}} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)\left(a + \left(\frac{b}{a}\right)^2 z\right)}{\left(\frac{a}{b}\right)(z-a)} = \frac{a - \frac{a}{b}z}{z-a}$$

$$= \frac{\left(\frac{-a}{b}\right)(-b+z)}{(z-a)} = \frac{-a}{b}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)$$

و بالتالي : $\boxed{\left(\frac{z-b_1}{z-a_1}\right) = \frac{-a}{b}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)}$

II 3 ب

لنبين أن التكافؤ التالي صحيح .

$\boxed{A \text{ و } B \text{ و } O \text{ و } M \text{ نقط متداورة}} \Leftrightarrow \boxed{A_1 \text{ و } B_1 \text{ و } M \text{ نقط مستقيمية}}$

لدينا : $\boxed{A_1 \text{ و } B_1 \text{ و } M \text{ نقط مستقيمية}} \Leftrightarrow \frac{z-b_1}{z-a_1} \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{-a}{b}\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b}\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{0-a}{0-b}\right) \times \left(\frac{z-b}{z-a}\right) \in \mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow \boxed{A \text{ و } B \text{ و } O \text{ و } M \text{ نقط متداورة}}$

التمرين الثالث

1 أ

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر قطعا من 1 بحيث : $3^n - 2^n = 0[n]$

إذن : n يقسم $(3^n - 2^n)$

و منه : $(\exists m \in \mathbb{N})\ ;\ 3^n - 2^n = mn \quad \twoheadrightarrow (1)$

ليكن p أصغر قاسم أولي موجب للعدد n .

إذن : $(\exists s \in \mathbb{N})\ ;\ n = ps \quad \twoheadrightarrow (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن : $3^n - 2^n = \underbrace{ms}_{\in \mathbb{N}}p$

إذن : p يقسم $(3^n - 2^n)$ يعني : $3^n - 2^n \equiv 0[p] \quad \twoheadrightarrow (3)$

لكي نبرهن على أن $p \geq 5$ يكفي أن نُفَنِّد العبارتين $p = 2$ و $p = 3$

نفترض أن $p = 2$

لدينا حسب النتيجة (3) : $3^n - 2^n \equiv 0\ [p]$

إذن حسب الافتراض : $3^n - 2^n \equiv 0\ [2] \quad \twoheadrightarrow (4)$

و نعلم أنه كيفما كان $n \in \mathbb{N}$ لدينا : $2^n \equiv 0[2] \quad \twoheadrightarrow (5)$

نجمع المتوافقتين (4) و (5) طرفا بطرف : $3^n - 2^n + 2^n \equiv 0\ [2]$

يعني : $3^n \equiv 0\ [2]$ و منه : 2 يقسم 3^n أي : $\boxed{2 \text{ يقسم } 3 \times 3^{n-1}}$

بما أن : $2 \wedge 3 = 1$ فإن $2 \wedge 3^{n-1} = 1\ ;\ (\forall n \in \mathbb{N}^*) \twoheadrightarrow (7)$

(6)

من (6) و (7) نستنتج إذن حسب $(Gauss)$ أن : 2 يقسم 3

و هذا تناقض واضح . إذن : $p \neq 2$

نفترض أن $p = 3$

لدينا حسب النتيجة (3) : $3^n - 2^n \equiv 0\ [p]$

إذن حسب الافتراض نكتب : $3^n - 2^n \equiv 0\ [3] \quad \twoheadrightarrow (8)$

و نعلم أن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ -3^n \equiv 0\ [3] \quad \twoheadrightarrow (9)$

نجمع المتوافقتين (8) و (9) طرفا بطرف: $3^n - 2^n - 3^n \equiv 0\ [3]$

يعني : $-2^n \equiv 0\ [3]$ أي : $2^n \equiv 0\ [3]$

يعني : 3 يقسم 2^n و منه : 3 يقسم $2 \times 2^{n-1} \twoheadrightarrow (10)$

بما أن : $2 \wedge 3 = 1$ فإن : $2^{n-1} \wedge 3 = 1\ ;\ (\forall n \in \mathbb{N}^*) \twoheadrightarrow (11)$

من (10) و (11) نستنتج حسب $Gauss$ أن : 3 يقسم 2

و هذا تناقض واضح . إذن : $p \neq 3$

خلاصة السؤال أ) :

إذا كان n عددا صحيحا طبيعيا أكبر قطعا من 1

و يحقق $3^n - 2^n \equiv 0\ [n]$ و كان p أصغر قواسمه الأولية الموجبة

فإن : $3^n - 2^n \equiv 0\ [p]$ و $p \geq 5$

1 ب

نعلم أن p عدد أولي و يخالف العدد الأولي 2 إذن : $p \wedge 2 = 1$

و منه حسب $Fermat$: $2^{p-1} \equiv 1\ [p]$

و بنفس الطريقة p عدد أولي يُخالف العدد الأولي 3 إذن : $p \wedge 3 = 1$

و منه حسب $Fermat$: $3^{p-1} \equiv 1\ [p]$

1 ج

يكفي أن نبرهن على أن : $n \wedge (p-1) = 1$ ثم نستعمل $Bezout$.

في البداية وجب التذكير بخاصية قوية و مهمة تربط بين مفهوم التفكيك إلى جداء عوامل أولية و مفهوم القاسم المشترك الأكبر . و سوف أُذَكّر بها باستعمال أمثلة فقط دون الخوض في متاهات الرموز الرياضية.

لاحظ الأمثلة التالية :

$$\begin{cases} (2^3 \times 5^4 \times 7^6) \wedge (2^1 \times 5^6 \times 7^3 \times 11^2) = (2^1 \times 5^4 \times 7^3) \\ (2^5 \times 7^8) \wedge (3^4 \times 11^6) = 1 \\ (2^7 \times 3^4 \times 13) \wedge (13 \times 11^4) = 13 \\ (13^5 \times 2^7 \times 3^2) \wedge (5^5 \times 7 \times 11^2) = 1 \end{cases}$$

بالعودة إلى السؤال ج) : ليكن $p^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \cdots \times p_i^{\alpha_i}$

تفكيك العدد n إلى جداء عوامل أولية بحيث : $p < p_2 < \cdots < p_i$

و ليكن $q^{r_1} \times q_2^{r_2} \times q_3^{r_3} \times \cdots \times q_j^{r_j}$ تفكيك العدد $(p-1)$

إلى جداء عوامل أولية بحيث : $q < q_2 < \cdots < q_j$

بما أن p هو أصغر قاسم أولي للعدد n و بما أن $(p-1) < p$

فإن : $q < q_1 < q_2 < \cdots < q_j < \boldsymbol{p} < p_2 < \cdots < p_i$

نلاحظ أن الأعداد الأولية $q.$ كلها تخالف الأعداد الأولية $p.$ إذن :

$$(p^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_i^{\alpha_i}) \wedge (q^{r_1} \times q_2^{r_2} \times \cdots \times q_j^{r_j}) = 1$$

يعني : $n \wedge (p-1) = 1$

و منه حسب $Bezout$: $\exists\ (a,u) \in \mathbb{Z}^2\ ;\ an + u(p-1) = 1$

نضع $b = -u$ إذن : $\exists\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\ ;\ an - b(p-1) = 1$ $\twoheadleftarrow$**(12)**

<u>ملاحظة 1)</u> : من هذه النتيجة الأخيرة يُمكن أن نستخرج باستعمال مبرهنة $Besout$ العكسية ما يلي :

$$(*) \twoheadrightarrow \begin{cases} a \wedge b = 1 \\ \boxed{a \wedge (p-1) = 1} \\ n \wedge b = 1 \\ n \wedge (p-1) = 1 \end{cases}$$

<u>خلاصة السؤال ج)</u> : إذا كان n عددا صحيحا طبيعيا أكبر قطعا من 1 و يحقق $3^n - 2^n \equiv 0\ [n]$ و كان p أصغر قواسمه الأولية الموجبة فإنه يوجد عددان نسبيان a و b بحيث : $an - b(p-1) = 1$

1 د

ليكن r و q على التوالي باقي و خارج القسمة الأقليدية لـ a على $(p-1)$.

يعني : $\begin{cases} (q,r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \\ a = q(p-1) + r \\ 0 \leq r < p-1 \end{cases}$

<u>ملاحظة 2)</u> : قبل أن نجيب على السؤال د) لاحظ أنه بإمكاننا أن نبين أن $r > 0$ و سوف نحتاج هذه النتيجة فيما سيأتي .

لدينا : $r \geq 0$ إذن $r = 0$ أو $r > 0$.

نفترض أن $r = 0$ إذن : $a = q(p-1)$

يعني : $(p-1)$ يقسم a و منه : $a \wedge (p-1) = (p-1)$

إذن حسب النتيجة $(*)$: $(p-1) = 1$

يعني : $p = 2$. و هذا تناقض لأن $p \geq 5$

إذن : $0 < r < (p-1)$

نعود إذن ، بعد هذه الجولة المرحة مع r ، إلى السؤال د) .

و ننطلق من التعبير التالي : $a = q(p-1) + r$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد n نحصل على :

$$an = qn(p-1) + rn$$

يعني : $rn = an - qn(p-1)$ $\twoheadleftarrow$**(13)**

و لدينا حسب النتيجة (12) : $an = 1 + b(p-1)$

نُعَوّض an بالتعبير $1 + b(p-1)$ في العلاقة (13) نجد :

$$rn = 1 + b(p-1) - qn(p-1)$$

أي : $rn = 1 + (b - qn)(p-1)$

نضع : $k = (b - qn)$ إذن : $rn = 1 + k(p-1)$

و لإتمام الجواب يكفي أن نُبرهن أن $k \in \mathbb{N}^*$

لدينا : $(b,q,n) \in \mathbb{Z}^3$ إذن : $k \in \mathbb{Z}$

و نَفْصل هنا بين ثلاث حالات و هي : $\boldsymbol{k = 0}$ أو $\boldsymbol{k} < 0$ أو $\boldsymbol{k} > 0$

<u>نفترض أن : $k = 0$</u> إذن : $b = qn$

نُعوض إذن b بالقيمة qn في النتيجة (12) : $an - qn(p-1) = 1$

و منه حسب النتيجة (13) : $rn = 1$

أي : n يقسم 1 يعني : $n = 1$

و هذا **<u>تناقض</u>** لأن : $n > 1$ إذن : $k \neq 0$ $\twoheadrightarrow$ $(\star)$

<u>نفترض أن : $k < 0$</u> إذن : $b < qn$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد السالب قطعا $-(p-1)$ نجد :

$$-b(p-1) > -qn(p-1)$$

نُضيف إلى كلا الطرفين الكمية an نجد :

$$an - b(p-1) > an - qn(p-1)$$

إذن باستعمال النتيجتين (12) و (13) نجد : $1 > rn$ $\twoheadleftarrow$**(14)**

و لدينا : $r > 0$ و $n > 1$ إذن : $rn > r$ $\twoheadleftarrow$**(15)**

من (14) و (15) نستنتج أن : $1 > rn > r$ يعني : $1 > r$

العدد الصحيح الطبيعي الوحيد الأصغر من 1 هو الصفر .

إذن : $r = 0$ و هذا **<u>تناقض</u>** لأن $r \neq 0$ حسب **<u>الملاحظة 2)</u>** .

إذن : $k > 0$ يعني : $k \in \mathbb{N}^*$

<u>خلاصة السؤال د)</u> : رأينا في هذا السؤال أنه إذا كان r و q على التوالي باقي و خارج القسمة الأقليدية للعدد a على العدد $(p-1)$ فإنه يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم k بحيث : $rn = 1 + k(p-1)$

أو بتعبير جميل : $(\exists k \in \mathbb{N}^*)\ ;\ rn = 1 + k(p-1)$ $\twoheadleftarrow$**(16)**

2

باستعمال البرهان بالخلف ، نفترض وجود عدد صحيح طبيعي n أكبر قطعا من 1 و يحقق : $3^n - 2^n \equiv 0\ [n]$. و ليكن p أصغر قاسم أولي موجب للعدد n .

ننطلق من النتيجتين : $\begin{cases} 2^{p-1} \equiv 1\ [p] \\ 3^{p-1} \equiv 1\ [p] \end{cases}$

بما أن : $(k \in \mathbb{N}^*)$ فإن : $\begin{cases} 2^{k(p-1)} \equiv 1\ [p] \\ 3^{k(p-1)} \equiv 1\ [p] \end{cases}$

و منه : $\begin{cases} -2 \times 2^{k(p-1)} \equiv -2\ [p] \\ 3 \times 3^{k(p-1)} \equiv 3\ [p] \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} -2^{1+k(p-1)} \equiv -2\ [p] \\ 3^{1+k(p-1)} \equiv 3\ [p] \end{cases}$

و منه باستعمال النتيجة (16) نكتب : $\begin{cases} -2^{rn} \equiv -2\ [p] \\ 3^{rn} \equiv 3\ [p] \end{cases}$

نجمع هاتين المتوافقتين طرفا بطرف نجد : $3^{rn} - 2^{rn} \equiv 1\ [p]$ $\twoheadleftarrow$**(17)**

و لدينا حسب النتيجة (3) : $3^n - 2^n \equiv 0\ [p]$

إذن : $3^n \equiv 2^n\ [p]$

و بما أن $(r\epsilon\mathbb{N}^*)$ فإن : $3^{rn} \equiv 2^{rn}\ [p]$

و منه : $2^{rn} - 3^{rn} \equiv 0\ [p]$ $\twoheadleftarrow$**(18)**

نجمع المتوافقتين (17) و (18) طرفا بطرف نجد :

$$3^{rn} - 2^{rn} + 2^{rn} - 3^{rn} \equiv 1 + 0\ [p]$$

يعني : $0 \equiv 1\ [p]$ يعني كذلك : $1 \equiv 0\ [p]$ أي : p يقسم 1

و منه $p = 1$ لأن العدد الصحيح الطبيعي الوحيد الذي يقسم 1 هو 1 نفسه .

و هذا **تناقض** لأن $p \geq 5$ إذن n لا وجود له في $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

خلاصة التمرين بأكمله :

$$\boxed{\forall\, n\, \epsilon\, \mathbb{N}^* \setminus \{1\}\ ;\ 3^n - 2^n \not\equiv 0\ [n]}$$

التمرين الرابع

الجزء الأول

1 أ

لدينا : $\begin{cases} h(x) = \dfrac{x-1}{x\ln x}\ ;\ \forall x > 1 \\ h(1) = 1 \end{cases}$

نضع : $\varphi(x) = x\ln x$

إذن :

$$\lim_{x\to1^+} h(x) = \lim_{x\to1^+}\left(\frac{x-1}{x\ln x}\right) = \lim_{x\to1^+}\frac{1}{\left(\dfrac{x\ln x}{x-1}\right)}$$
$$= \lim_{x\to1^+}\frac{1}{\left(\dfrac{x\ln x - 1\ln 1}{x-1}\right)} = \lim_{x\to1^+}\frac{1}{\left(\dfrac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}\right)}$$
$$= \frac{1}{\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}\right)} = \frac{1}{\varphi_d'(1)}$$

و لدينا : $\varphi(x) = x\ln x$ إذن : $\varphi'(x) = \ln x + 1$

يعني : $\varphi_d'(1) = \varphi_g'(1) = \varphi'(x) = \ln(1) + 1 = 1$

و بالتالي : $\lim\limits_{x\to1^+} h(x) = \dfrac{1}{\varphi_d'(1)} = \dfrac{1}{1} = 1 = h(1)$

إذن : $\lim\limits_{x\to1^+} h(x) = h(1)$

و هذا يعني أن الدالة h دالة متصلة على يمين 1

1 ب

نعتبر الدالة العددية v المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي :

$$v(x) = \ln x - x + 1$$

لندرس تغيرات الدالة v على المجال $]0;+\infty[$.

لدينا v عبارة عن تشكيلة منسجمة من الدوال المتصلة و القابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$. إذن : v قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$.

و لدينا : $v'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$

- إذا كان : $x = 1$ فإن : $v'(x) = 0$
- إذا كان : $x > 1$ فإن : $v'(x) < 0$
- إذا كان : $x < 1$ فإن : $v'(x) > 0$

و لدينا كذلك :

$$\lim_{x\to0^+} v(x) = \lim_{x\to0^+}(\ln x - x + 1)$$
$$= \ln(0^+) - 0 + 1 = -\infty - 0 + 1 = -\infty$$

و لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} v(x) = \lim_{x\to+\infty}(\ln x - x + 1)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{1}{x}\right)$$
$$= (+\infty)(0 - 1 + 0) = -\infty$$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة v كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$v'(x)$		$+$	0	$-$	
v	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

نلاحظ من خلال هذا الجدول أن الدالة v :

- متصلة على المجال $]0;+\infty[$.
- تزايدية على المجال $]0;1]$.
- تناقصية على المجال $[1;+\infty[$
- $v(1) = -2$

إذن -2 قيمة قصوية للدالة v على المجال $]0;+\infty[$.

يعني $\forall\, x\, \epsilon\,]0;+\infty[\ ;\ v(x) \leq -2 < 0$

يعني $\forall\, x\, \epsilon\,]0;+\infty[\ ;\ v(x) < 0$

يعني $\forall\, x\, \epsilon\,]0;+\infty[\ ;\ \ln x - x + 1 < 0$

يعني $\forall\, x\, \epsilon\,]0;+\infty[\ ;\ \ln x < x - 1$

و بما أن : $]1;+\infty[\ \subset\ ]0;+\infty[$

فإن : $\forall\, x\, \epsilon\,]1;+\infty[\ ;\ \ln x < x - 1$

ليكن x عنصرا من المجال $]1;+\infty[$. لدينا : $h(x) = \dfrac{x-1}{x\ln x}$

إذن :

$$h'(x) = \frac{x\ln x - (x-1)(\ln x + 1)}{(x\ln x)^2}$$
$$= \frac{x\ln x - (x\ln x + x - \ln x - 1)}{(x\ln x)^2}$$
$$= \frac{\ln x - x + 1}{(x\ln x)^2}$$

و نعلم أن : $(\forall x > 1)\ ;\ (\ln x - x + 1) < 0$

و كذلك : $(\forall x > 1)\ ;\ (x\ln x)^2 > 0$

إذن : $(\forall x > 1)\ ;\ \dfrac{\ln x - x + 1}{(x\ln x)^2} < 0$

يعني : $(\forall x > 1)\ ;\ h'(x) < 0$

أي أن الدالة h تناقصية قطعا على المجال $]1;+\infty[$.

2 أ

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x\ln x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x\ln x}\right)-\left(\frac{1}{x\ln x}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln x}\right)-\left(\frac{1}{x\ln x}\right) = \left(\frac{1}{+\infty}\right)-\left(\frac{1}{+\infty}\right) = 0$$

نُلخص النتائج المتعلقة بالدالة h في الجدول التالي :

x	1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$-$
h	$1 \searrow 0$

2 ب

نلاحظ حسب جدول تغيرات الدالة h أن الدالة h متصلة و تناقصية قطعا على المجال $[1;+\infty[$ بحيث :

$$h([1;+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} h(x)\ ;\ h(1)\right] =]0;1]$$

إذن : h تقابل من المجال $[1;+\infty[$ نحو المجال $]0;1]$.

أي : $\forall\, x \in [1;+\infty[\ ;\ \exists!\, y \in]0;1]\ :\ y = h(x)$

أو بتعبير آخر : $\forall\, x \in [1;+\infty[\ ;\ \exists!\, h(x) \in]0;1]$

يعني : $(\forall x \geq 1)\ ;\ 0 < h(x) \leq 1$

الجزء الثاني

1 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]1;+\infty[$.

لاحظ في البداية أن : $(t\ln t)' = 1+\ln t$

نستغل إذن هذه الملاحظة أثناء الحساب .

$$\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}\,dt = \int_x^{x^2}\left(\frac{1+\ln t-\ln t}{t\ln t}\right)dt$$
$$= \int_x^{x^2}\left(\frac{1+\ln t}{t\ln t}\right)dt - \int_x^{x^2}\left(\frac{1}{t}\right)dt$$
$$= \int_x^{x^2}\frac{(t\ln t)'}{t\ln t}\,dt - \int_x^{x^2}\frac{1}{t}\,dt$$
$$= [\ln(t\ln t)]_x^{x^2} - [\ln t]_x^{x^2}$$
$$= (\ln(x^2\ln(x^2)) - \ln(x\ln x)) - (\ln(x^2)-\ln x)$$
$$= \ln\left(\frac{x^2\ln(x^2)}{x\ln x}\right) - \ln\left(\frac{x^2}{x}\right) = \ln\left(\frac{2x^2\ln(x)}{x\ln x}\right) - \ln(x)$$
$$= \ln(2x)-\ln(x) = \ln\left(\frac{2x}{x}\right) = \ln 2$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall x>1)\ ;\ \int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}\,dt = \ln 2}$

1 ب

ليكن x عنصرا من المجال $]1;+\infty[$.

$$g(x)-\ln 2 = \int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{t}\,\ln t}\,dt - \int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}\,dt$$
$$= \int_x^{x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{t}\,\ln t}-\frac{1}{t\ln t}\right)dt$$
$$= \int_x^{x^2}\left(\frac{\sqrt{t}}{t\ln t}-\frac{1}{t\ln t}\right)dt$$
$$= \int_x^{x^2}\left(\frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}\right)dt$$

1 ج

باستعمال تقنية تغيير المتغير نضع : $\sqrt{t} = u$

إذن : $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ يعني : $dt = 2u\,du$

- إذا كان $t = x$ فإن : $u = \sqrt{x}$
- إذا كان $t = x^2$ فإن : $u = x$

إذن آخر تكامل حصلنا عليه يصبح :

$$\int_x^{x^2}\left(\frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}\right)dt = \int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{u-1}{u^2\ln(u^2)}\right)(2u\,du)$$
$$= \int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{u-1}{2u^2\ln u}\right)(2u\,du)$$
$$= \int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{u-1}{u\ln u}\right)du$$

إذن : $(\forall x>1)\ ;\ g(x)-\ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{1}{u\ln u}\right)du$

Remarque : u et t sont des paramètres d'intégration qu'on peut schématiser comme des espaces mémoires temporels

2 أ

ليكن $x>1$ و ليكن $t \in [\sqrt{x};x]$.

لدينا الدالة f تناقصية على المجال $[1;+\infty[$.

إذن فهي تناقصية على المجال $[\sqrt{x};x]$ لأن $x>1$.

بما أن : $\sqrt{x}\leq t\leq x$ فإن : $h(x)\leq h(t)\leq h(\sqrt{x})$

يعني : $h(x) \leq \left(\dfrac{t-1}{t\ln t}\right) \leq h(\sqrt{x})$

إذن : $\int_{\sqrt{x}}^{x} h(x)\,dt \leq \int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{t-1}{t\ln t}\right)dt \leq \int_{\sqrt{x}}^{x} h(\sqrt{x})\,dt$

يعني : $h(x)\int_{\sqrt{x}}^{x}1\,dt \leq \int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{t-1}{t\ln t}\right)dt \leq h(\sqrt{x})\int_{\sqrt{x}}^{x}1\,dt$

يعني : $h(x)\,[t]_{\sqrt{x}}^{x} \leq \int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{t-1}{t\ln t}\right)dt \leq h(\sqrt{x})\,[t]_{\sqrt{x}}^{x}$

يعني : $h(x)(x-\sqrt{x}) \leq \int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{t-1}{t\ln t}\right)dt \leq h(\sqrt{x})(x-\sqrt{x})$

و بالتالي حسب نتيجة السؤال ج) $(\forall x>1)$ نكتب :

$$(*)\quad \boxed{h(x)(x-\sqrt{x}) \leq g(x)-\ln 2 \leq h(\sqrt{x})(x-\sqrt{x})}$$

2 ب

نضرب أطراف التأطير $(*)$ في العدد الموجب قطعا $\left(\frac{1}{x-1}\right)$ نجد :

$$\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right)h(x) \leq \frac{g(x)-\ln 2}{x-1} \leq \left(\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right)h(\sqrt{x})$$

بعد ذلك نحسب نهايتي طرفي هذا التأطير على يمين 1 نجد :

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right)h(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}h(x)$$
$$= \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)h(x) = \left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}+1}\right)h(1) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right)h(\sqrt{x}) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)h(\sqrt{x})$$
$$= \left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}+1}\right)h(\sqrt{1}) = \frac{1}{2}$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$\underbrace{\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right)h(x)}_{\xrightarrow[x\to 1^+]{} \frac{1}{2}} \leq \frac{g(x)-\ln 2}{x-1} \leq \underbrace{\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right)h(\sqrt{x})}_{\xrightarrow[x\to 1^+]{} \frac{1}{2}}$$

$\boxed{\frac{1}{2}}$

و بالتالي : $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\right) = \frac{1}{2}$

أي أن الدالة g قابلة للإشتقاق على اليمين في 1 و $g'_d(1) = \frac{1}{2}$.

2 ج

لدينا حسب التأطير الوارد في السؤال 2) أ) :

$$(\forall x > 1)\ ;\ g(x) \geq h(x)(x-\sqrt{x}) + \ln 2$$

لنحسب نهاية $(x-\sqrt{x})h(x)+\ln 2$ بجوار $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x})h(x)+\ln 2 = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x})(x-1)}{x\ln x}+\ln 2$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(x-1)}{x\ln x}+\ln 2$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\ln x}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{x-1}{x}\right)+\ln 2$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{\ln x}{x}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)+\ln 2$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{0^+}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{+\infty}}\right)\left(1-\frac{1}{+\infty}\right)+\ln 2$$
$$= \lim_{x\to+\infty}(+\infty)(1-0)(1-0)+\ln 2$$
$$= (+\infty)(1)(1)+\ln 2 = +\infty$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$(\forall x > 1)\ ;\ g(x) \geq \underbrace{h(x)(x-\sqrt{x})+\ln 2}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty}$$

إذن حسب خاصية الترتيب و النهايات نستنتج أن : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

بالنسبة لنهاية $\frac{g(x)}{x}$ بجوار $+\infty$ ننطلق من التأطير الثمين المحصل عليه في السؤال 2) أ) كما سوف نستعمل أثناء الحساب النهاية المحصل عليها سابقا و هي : $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$. لدينا :

$$(x-\sqrt{x})h(x)+\ln 2 \leq g(x) \leq (x-\sqrt{x})h(\sqrt{x})+\ln 2$$

نضرب طرفي هذا التأطير في العدد الموجب قطعا $\frac{1}{x}$ نجد :

$$\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x}\right)h(x)+\frac{\ln x}{x} \leq \frac{g(x)}{x} \leq \left(\frac{x-\sqrt{x}}{x}\right)h(\sqrt{x})+\frac{\ln 2}{x}$$

ثم نحسب نهايتي طرفي هذا التأطير بجوار $+\infty$ نحصل على :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x}\right)h(x)+\frac{\ln 2}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)h(x)+\frac{\ln 2}{x}$$
$$= \left(1-\frac{1}{\sqrt{+\infty}}\right)(0)+\frac{\ln 2}{+\infty} = (1-0)(0)+0 = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x}\right)h(\sqrt{x})+\frac{\ln 2}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)h(\sqrt{x})+\frac{\ln 2}{(\sqrt{x})^2}$$
$$= \lim_{\substack{t\to+\infty \\ t=\sqrt{x}}}\left(1-\frac{1}{t}\right)h(t)+\frac{\ln 2}{t^2}$$
$$= \left(1-\frac{1}{+\infty}\right)(0)+\frac{\ln 2}{(+\infty)^2} = 0$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$\underbrace{\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x}\right)h(x)+\frac{\ln x}{x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} \mathbf{0}} \leq \frac{g(x)}{x} \leq \underbrace{\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x}\right)h(\sqrt{x})+\frac{\ln 2}{x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} \mathbf{0}}$$

إذن حسب خاصية النهايات و الترتيب نستنتج أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = 0$

3 أ

أذكّر في البداية بما يلي : إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و كان a عنصرا من المجال I . فإن f تقبل عدة دوال أصلية على المجال I و بالخصوص تقبل دالة أصلية F التي تنعدم في a و تحقق :

$$F : I \longmapsto \mathbb{R} \quad x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{و} \quad \begin{cases} F(a) = 0 \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$$

انتهى التذكير .

ليكن a عنصرا من المجال $]1;+\infty[$.

نعتبر الدالة العددية u المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بما يلي :

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}$$

نلاحظ أن u دالة متصلة على $]1;+\infty[$ و ذلك حسب المبرهنات العامة للاتصال .

إذن : u تقبل عدة دوال أصلية على $]1;+\infty[$ و بالخصوص u تقبل دالة أصلية v التي تنعدم في a و معرفة بما يلي :

$$v :]1;+\infty[\longmapsto \mathbb{R} \quad x \longmapsto \int_a^x u(t)\,dt \quad \text{و} \quad \begin{cases} v(a) = 0 \\ v'(x) = u(x) \end{cases}$$

و بالتالي بالرجوع إلى تعريف الدالة g نكتب :

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}dt \; ; \; x > 1 \\ &= \int_x^{a} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}dt + \int_a^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}dt \\ &= \int_a^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}dt - \int_a^{x} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}dt \\ &= v(x^2) - v(x) \end{aligned}$$

نحصل إذن على العلاقة التالية : $g(x) = v(x^2) - v(x)\,;\; x > 1$

انطلاقا من الدوال $x \to x$ و v و $x \to x^2$ نستطيع القول ، باستعمال المبرهنات العامة لاشتقاق مركب دالتين ، أن g قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$.

و لدينا : $(\forall x > 1)\;;\; g'(x) = \left(v(x^2) - v(x)\right)'$

$$\begin{aligned} &= 2x\, v'(x^2) - v'(x) \\ &= 2x\, u(x^2) - u(x) \\ &= \frac{2x}{\sqrt{x^2}\ln(x^2)} - \frac{1}{\sqrt{x}\ln x} = \frac{2x}{2x\ln x} - \frac{1}{\sqrt{x}\ln x} \\ &= \frac{x}{x\ln x} - \frac{\sqrt{x}}{x\ln x} = \frac{x - \sqrt{x}}{x\ln x} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x})^2\ln\left(\sqrt{x}^2\right)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\,\ln\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2}h(\sqrt{x}) \end{aligned}$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall x > 1)\;;\; g'(x) = \frac{1}{2}h(\sqrt{x})}$

3 ب

لدينا حسب نتيجة السؤال 2) ب) من الجزء الأول :

$$(\forall x \geq 1)\;;\; 0 < h(x) \leq 1$$

نلاحظ أن : $x \geq 1 \implies \sqrt{x} \geq 1$

إذن : $(\forall x \geq 1)\;;\; 0 < h(\sqrt{x}) \leq 1$

و منه : $(\forall x \geq 1)\;;\; 0 < \frac{1}{2}h(\sqrt{x}) \leq \frac{1}{2}$

يعني : $(\forall x \geq 1)\;;\; 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$

و من هذه الكتابة نستنتج أن g دالة تزايدية قطعا على المجال $]1;+\infty[$.

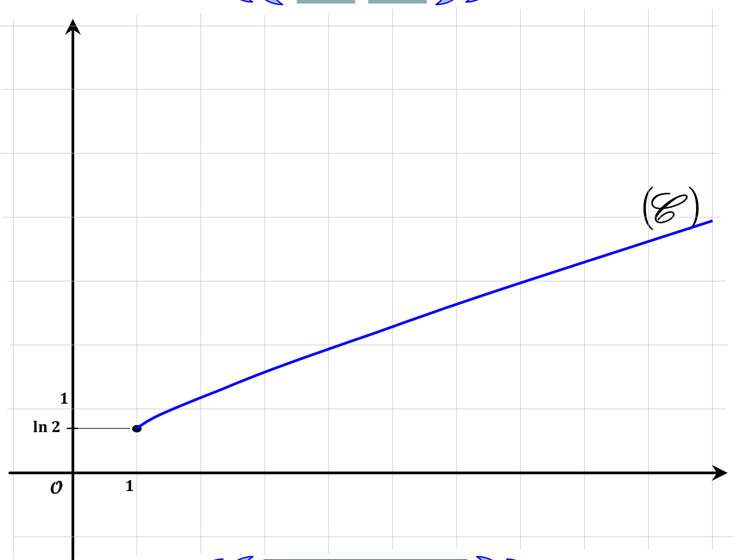
و لإنشاء جدول تغيرات g نستدعي النتائج التي حصلنا عليها من قبل و هي :

- g معرفة و متصلة على $]1;+\infty[$
- g تزايدية قطعا على $]1;+\infty[$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = g(1) = \ln 2$

نرسم إذن جدول تغيرات g كما يلي :

x	1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
g	$\ln 2 \nearrow +\infty$

3 ج



الجزء الثالث

I 1

ليكن x عنصرا من المجال $]1;+\infty[$.

لدينا : $k(x) = g(x) - x + 1$

بما أن g قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$

فإن : k قابلة للإشتقاق على $]1;+\infty[$ و لدينا : $k'(x) = g'(x) - 1$

لدينا حسب نتيجة السؤال 3) ب) من الجزء الثاني :

$$(\forall x \geq 1)\;;\; 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$$

إذن : $(\forall x \geq 1)\ ;\ 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2} < 1$

يعني : $(\forall x \geq 1)\ ;\ g'(x) < 1$

و منه : $(\forall x \geq 1)\ ;\ g'(x) - 1 < 0$

أي : $(\forall x \geq 1)\ ;\ k'(x) < 0$

و هذا يعني أن الدالة k تناقصية قطعا على المجال $[1;+\infty[$.

إذن k تقابل من المجال $[1;+\infty[$ نحو صورته بالدالة k .

و لدينا $k([1;+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)\ ;\ k(1)\right]$

$$\lim_{x\to+\infty} k(x) = \lim_{x\to+\infty} (g(x) - x + 1) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{g(x)}{x} - 1 + \frac{1}{x}\right)$$
$$= \left(0 - 1 + \frac{1}{+\infty}\right)(+\infty) = (-1)(+\infty) = -\infty$$

و بالتالي : k تقابل من المجال $[1;+\infty[$ نحو المجال $]-\infty;\ln 2]$.

I 2

لدينا : $\ln 2 > 0$ إذن : $0\ \epsilon\ ]-\infty;\ln 2]$

و بما أن k تقابل من $[1;+\infty[$ نحو $]-\infty;\ln 2]$

فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا بالدالة k في المجال $[1;+\infty[$.

يعني بتعبير آخر : $\exists!\ \alpha\ \epsilon\ [1;+\infty[\ ;\ k(\alpha) = 0$

يعني : $\exists!\ \alpha\ \epsilon\ [1;+\infty[\ ;\ g(\alpha) - \alpha + 1 = 0$

يعني : $\exists!\ \alpha\ \epsilon\ [1;+\infty[\ ;\ 1 + g(\alpha) = \alpha$

أو بتعبير لطيف : المعادلة $1 + g(x) = x$ تقبل حلا وحيدا

في المجال $[1;+\infty[$ و هو α .

II 1 أ

باستعمال البرهان بالترجع ، نعتبر العبارة (P_n) التالية :

$(P_n) :\ (\forall n \geq 0)\ ;\ 1 \leq u_n < \alpha$

من أجل $n = 0$ لدينا حسب المعطيات : $1 \leq u_0 < \alpha$

إذن : العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن $n \epsilon \mathbb{N}$ و نفترض أن : $1 \leq u_n < \alpha$

نُدخل على هذا التأطير الدالة التزايدية قطعا g نحصل على :

$g(1) \leq g(u_n) < g(\alpha)$

ثم نضيف 1 لكل طرف : $g(1) + 1 \leq g(u_n) + 1 \leq g(\alpha) + 1$

إذن : باستعمال النتائج السابقة نكتب : $1 < \ln 2 + 1 \leq u_{n+1} < \alpha$

يعني : $1 \leq u_{n+1} < \alpha$ إذن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

حصلنا إذن على الوضعية التالية : $\begin{cases} (P_0)\ est\ vraie \\ (P_n)\ implique\ (P_{n+1})\ ;\ \forall n \geq 0 \end{cases}$

و بالتالي حسب مبدأ الترجع : $(P_n)\ est\ toujours\ vraie$

أي : $(\forall n \geq 0)\ ;\ 1 \leq u_n < \alpha$

II 1 ب

لدينا حسب آخر نتيجة : $(\forall n \geq 0)\ ;\ u_n < \alpha$

نُدخل الدالة التناقصية قطعا k على هذه المتفاوتة نجد :

$(\forall n \geq 0)\ ;\ k(u_n) > k(\alpha)$

و بما أن : $k(\alpha) = 0$ فإن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ k(u_n) > 0$

يعني : $(\forall n \geq 0)\ ;\ g(u_n) - u_n + 1 > 0$

يعني : $(\forall n \geq 0)\ ;\ 1 + g(u_n) > u_n$

و منه : $(\forall n \geq 0)\ ;\ u_{n+1} > u_n$

و من هذه الكتابة نستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا .

II 1 ج

لدينا $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية تزايدية قطعا .

و بما أنها مكبورة بالعدد α (لأن $(\forall n \geq 0)\ ;\ u_n < \alpha$ حسب 1) أ))

فإنها متقاربة و نهايتها ℓ تحقق : $1 + g(\ell) = \ell$

و رأينا أن هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا في المجال $]1;+\infty[$ و هو α .

إذن : $\ell = \lim\limits_{n\infty}(u_n) = \alpha$

II 2 أ

نعتبر الدالة العددية ψ المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بما يلي : $\psi(x) = 1 + g(x)$

بما أن g قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$.

فإن ψ قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$.

و منه ψ قابلة للإشتقاق على أي مجال يوجد ضمن $]1;+\infty[$.

نختار المجال $[u_n;\alpha]$ الذي يوجد ضمن $]1;+\infty[$

(و ذلك لأن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ 1 \leq u_n < \alpha$)

إذن بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية (TAF)

على الدالة ψ في المجال $[u_n\ ;\alpha]$ نجد :

$$\exists\ c\ \epsilon\ ]u_n;\alpha[\ ;\ \frac{\psi(u_n) - \psi(\alpha)}{u_n - \alpha} = \psi'(c)$$

لدينا : $\begin{cases} \psi(u_n) = 1 + g(u_n) = u_{n+1} \\ \psi(\alpha) = 1 + g(\alpha) = \alpha \end{cases}$

إذن : $\exists\ c\ \epsilon\ ]u_n;\alpha[\ ;\ \dfrac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha} = \psi'(c)$

يعني : $(*)\ \ \exists\ c\ \epsilon\ ]u_n;\alpha[\ ;\ \left|\dfrac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha}\right| = |\psi'(c)|$

لدينا : $\psi'(c) = g'(c)$ و $c\ \epsilon\ ]u_n;\alpha[$

إذن : $1 \leq u_n < c < \alpha$ أي : $c \geq 1$

و منه حسب نتيجة السؤال 3) ب) من الجزء الثاني : $0 < g'(c) \leq \dfrac{1}{2}$

إذن : $|\psi'(c)| = |g'(c)| \leq \dfrac{1}{2}$

أي : $(**)\ \ |\psi'(c)| \leq \dfrac{1}{2}$

إذن باستعمال الكتابتين $(*)$ و $(**)$ نكتب :

$$(\forall n \geq 0)\ ;\ \left|\frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha}\right| \leq \frac{1}{2}$$

يعني : $(\forall n \geq 0)\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$

ب 2 II

لدينا : $(\forall n \geq 0)\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}\ |u_n - \alpha|$

إذن بتغيير $(n+1)$ بـ n نجد : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}\ |u_{n-1} - \alpha|$

$$\leq \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\ |u_{n-2} - \alpha|$$

$$\leq \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\ |u_{n-3} - \alpha|$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_{n-n} - \alpha|$$

إذن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

و يمكن كذلك استعمال البرهان بالترجع .

لنبرهن بالترجع على أن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

من أجل $n = 0$ لدينا : $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0 - \alpha|$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

ليكن $n \epsilon \mathbb{N}$ و نفترض أن : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $\frac{1}{2}$ نجد :

$$(\forall n \geq 0)\ ;\ \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$$

بما أن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

فإن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

و هذا يعني أن العبارة صحيحة من أجل $(n+1)$.

و بالتالي حسب مبدأ الترجع :

$$(\forall n \geq 0)\ ;\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

ج 2 II

نلاحظ أن $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها عدد موجب قطعا و أصغر من 1 .

إذن : $\lim_{n\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ و منه : $\lim_{n\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| = 0$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$(\forall n \geq 0)\ ;\ |u_n - \alpha| \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|}_{\xrightarrow[n\infty]{} \mathbf{0}}$$

أو بتعبير واضح نحصل على الوضعية التالية :

$$(\forall n \geq 0)\ ;\ \underbrace{-\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|}_{\xrightarrow[n\infty]{} \mathbf{0}} \leq (u_n - \alpha) \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|}_{\xrightarrow[n\infty]{} \mathbf{0}}$$

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim_{n\infty}(u_n - \alpha) = 0$

أي : $\lim_{n\infty} u_n = \alpha$