

التمرين الأول: (3 نقط)

لكل n من \mathbb{N}^* نضع : $a_n = \underbrace{333\dots31}_{n \text{ مرة}}$ (n مرة الرقم 3)

1- تحقق أن العددين a_1 و a_2 أوليان. 0.5

2- بين أن لكل n من \mathbb{N}^* : $3a_n + 7 = 10^{n+1}$ 0.5

3- بين أن لكل k من \mathbb{N} : $10^{30k+2} \equiv 7 \pmod{31}$ 0.75

4- بين أن لكل k من \mathbb{N} : $3a_{30k+1} \equiv 0 \pmod{31}$ ، ثم استنتج أن 31 يقسم a_{30k+1} 0.75

5- بين أنه لكل n من \mathbb{N}^* ، إذا كان $[30] \nmid n$ فإن المعادلة $a_n x + 31y = 1$ لا تقبل حولا في \mathbb{Z}^2 0.5

التمرين الثاني: (3.5 نقطة)

نذكر أن $(\square, +, \times)$ جسم تبادلي و أن $(M_2(\square), +, \times)$ حلقة واحدة صفرها $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

و وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

لكل a و b من \square ، نضع : $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$ ونعتبر المجموعة : $E = \{M(a, b) / (a, b) \in \square^2\}$

1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\square), +)$. 0.5

2- احسب $J^2 = J' J$ حيث : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ثم استنتج أن E جزء غير مستقر من $(M_2(\square), \times)$ 0.75

3- نعرف على $M_2(\square)$ قانون التركيب الداخلي * بما يلي : $A * B = A \times N \times B$ حيث : $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ونعتبر التطبيق φ من \square^* نحو $M_2(\square)$ الذي يربط كل عدد عقدي غير منعدم $a + ib$ (a و b عدنان حقيقيان) بالمصفوفة $M(a, b)$.

(أ) بين أن φ تشاكل من (\square^*, \times) نحو $(M_2(\square), *)$ 0.5

(ب) نضع : $E^* = E - \{O\}$. بين أن : $\varphi(\square^*) = E^*$ 0.25

(ج) بين أن $(E^*, *)$ زمرة تبادلية. 0.5

4- بين أن : $(\forall (A, B, C) \in E^3) A * (B + C) = A * B + A * C$ 0.5

5- استنتج مما سبق أن $(E, +, *)$ جسم تبادلي. 0.5

التمرين الثالث: (3.5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) .

ليكن θ عددا حقيقيا بحيث: $q = \frac{p}{2} - \frac{p^2}{4}$

1- نعتبر في المجموعة \square المعادلة التالية: $(E) \quad z^2 - \sqrt{2}e^{i\theta}z + e^{2i\theta} = 0$

(أ) تحقق أن مميز المعادلة (E) هو: $D = (\sqrt{2}ie^{i\theta})^2$ 0.25

(ب) اكتب على الشكل المثلي z_1 و z_2 حل المعادلة (E) في المجموعة \square . 0.75

2- نعتبر النقط I و J و T_1 و T_2 و A التي ألقاها على التوالي 1 و -1 و $e^{i\frac{p}{4}}$ و $e^{i\frac{p}{4}}$ و $\sqrt{2}e^{iq}$

(أ) بين أن المستقيمين (OA) و (T_1T_2) متعامدان . 0.5

(ب) ليكن K منتصف القطعة $[T_1T_2]$. بين أن النقط O و K و A مستقيمية. 0.25

(ج) استنتج أن المستقيم (OA) هو واسط القطعة $[T_1T_2]$. 0.25

3- ليكن r الدوران الذي مركزه T_1 و قياس زاويته $\frac{p}{2}$

(أ) اعط الصيغة العقدية للدوران r . 0.25

(ب) تحقق أن لحق النقطة B صورة النقطة I بالدوران r هو: $b = \sqrt{2}e^{iq} + i$ 0.5

(ج) بين أن المستقيمين (IJ) و (AB) متعامدان . 0.25

4- حدد لحق النقطة C صورة النقطة A بالإزاحة التي متجهتها $\begin{pmatrix} 1 \\ -v \end{pmatrix}$ 0.25

5- بين أن النقطة A هي منتصف القطعة $[BC]$. 0.25

التمرين الرابع: (8 نقط)

$$f(x) = \frac{-x \ln x}{1+x^2}; \quad x > 0$$

$$f(0) = 0$$

I - نعتبر الدالة f المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي:

1- (أ) بين أن الدالة f متصلة على المجال $[0, +\infty[$ 0.5

(ب) أدرس إشارة $f(x)$ على المجال $[0, +\infty[$ 0.25

2- (أ) بين أن: $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ 0.25

(ب) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ 0.25

ج) بين أن: $(\exists \alpha \in]0,1[) \quad f'(\alpha) = 0$ 0.5

د) استنتج أن: $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$ 0.5

II - نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي: $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم.

1- أ) تحقق أن: $(\forall t \in [1, +\infty[) \quad \frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$ 0.5

ب) بين أن: $(\forall x \in [1, +\infty[) \quad F(1) - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) - \frac{1}{4}(\ln x)^2$ 1

(لاحظ أن: $F(x) = \int_0^1 f(t) dt - \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{\ln t}{t} dt$)

ج) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها. 1

2- أ) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $[0, +\infty[$ ثم أحسب $F'(x)$ 0.5

ب) أدرس تغيرات الدالة F على المجال $[0, +\infty[$ 0.25

III- 1- أ) بين أن: $(\forall t \in]0, +\infty[) \quad -t \ln t \leq \frac{1}{e}$ 0.5

ب) بين أن: $(\forall t \in [0, +\infty[) \quad f(t) \leq \frac{1}{e}$ 0.25

ج) استنتج أن: $F(x) < x$ $(x \in]0, +\infty[)$ 0.25

2- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي: $u_0 \in]0, 1[$ و $u_{n+1} = F(u_n)$ $(n \in \mathbb{N})$

أ) بين أن: $u_n \in]0, 1[$ $(n \in \mathbb{N})$ 0.5

ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة. 0.5

ج) حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ 0.5

التمرين الخامس: (2 نقط)

$$g(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} ; x > 0$$
$$g(0) = 0$$

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي:

1- بين أن الدالة g متصلة على المجال $[0, +\infty[$ 0.5

2- لكل عدد حقيقي x من المجال $[0, +\infty[$ ، نضع $L(x) = \int_x^1 g(t) dt$

أ) بين أن الدالة L متصلة على المجال $[0, +\infty[$ 0.25

ب) أحسب $L(x)$ من أجل $x > 0$ 0.25

ج) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x)$ ثم استنتج قيمة $L(0)$ 0.5

3- لكل عدد صحيح طبيعي n أكبر من أو يساوي 1 نضع: $s_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{p=n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$

بين أن المتتالية $(s_n)_{n \geq 1}$ متقاربة ثم حدد نهايتها. 0.5

انتهى

التمرين الاول

$$n \in \mathbb{N}^*; a_n = \underbrace{333\dots31}_{n \times}$$

(1) نتحقق من أن a_1 و a_2 أوليان

لدينا $a_1 = 31$ و 31 عدد أولي

لدينا $a_2 = 331$ و 331 لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية التي مربعها أصغر منه أي (2 - 3 - 5 - 7 - 11 - 13 و 17)

إذن 331 عدد أولي

$$a_1 \text{ و } a_2 \text{ عددان أوليان}$$

(2) لنبين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 3a_n + 7 = 10^{n+1}$

$$\text{لدينا: } (\forall n \in \mathbb{N}^*); a_n = 1 + 3 \times 10 + 3 \times 10^2 + \dots + 3 \times 10^n = 1 + 3(10 + 10^2 + \dots + 10^n)$$

$$\text{و } (\forall n \in \mathbb{N}^*); 10 + 10^2 + \dots + 10^n = 10 \times \frac{1 - 10^n}{1 - 10} = \frac{10^{n+1} - 10}{9}$$

$$\text{و منه } (\forall n \in \mathbb{N}^*); 3a_n + 7 = 10^{n+1}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); 3a_n + 7 = 10^{n+1}$$

(3) لنبين أن $(\forall k \in \mathbb{N}); 10^{30k+2} \equiv 7[31]$

لدينا حسب (2) $10^2 - 7 = 3 \times 31$ إذن $10^2 \equiv 7[31]$

و لدينا $10^3 \equiv 70 \equiv 8[31] \Rightarrow 10^6 \equiv 64 \equiv 2[31] \Rightarrow 10^{30} \equiv 32 \equiv 1[31] \Rightarrow 10^{30k} \equiv 1[31]$

$$\text{و أخيرا } \begin{cases} 10^2 \equiv 7[31] \\ 10^{30k} \equiv 1[31] \end{cases} \Rightarrow 10^{30k+2} \equiv 7[31]$$

$$(\forall k \in \mathbb{N}); 10^{30k+2} \equiv 7[31]$$

(4) لنبين أن $(\forall n \in \mathbb{N}); 3a_{30k+1} \equiv 0[31]$ ثم لنستنتج أن 31 يقسم a_{30k+1}

لكل k من \mathbb{N} , $30k+1 \in \mathbb{N}^*$ (إذن حسب (2) $3a_{30k+1} + 7 = 10^{30k+2}$ و حسب (3) $10^{30k+2} \equiv 7[31]$)

$$\text{إذن } 3a_{30k+1} + 7 \equiv 7[31] \text{ و منه } 3a_{30k+1} \equiv 0[31]$$

و بما أن 31 يقسم $3a_{30k+1}$ و $31 \wedge 3 = 1$ فإن حسب مبرهنة كوكس 31 يقسم a_{30k+1}

$$(\forall n \in \mathbb{N}); 3a_{30k+1} \equiv 0[31] \text{ } 31 \text{ يقسم } a_{30k+1}$$

(5) لنبين أن المعادلة $a_n x + 31y = 1$ لا تقبل حلول في \mathbb{Z}^2

لدينا $(n \in \mathbb{N}^*); n \equiv 1[30] \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*; n = 30k + 1$

و منه حسب السؤال (4) 31 يقسم a_n أي أن $a_n \wedge 31 = 31$ و هذا يعني ان المعادلة $a_n x + 31y = 1$ لا تقبل حلول في \mathbb{Z}^2

(الشرط اللازم لكي تقبل هذه المعادلة حلول في \mathbb{Z}^2 هو $a_n \wedge 31 = 1$)

$$\text{المعادلة } a_n x + 31y = 1 \text{ لا تقبل حلول في } \mathbb{Z}^2$$

التمرين الثاني

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2; M(a,b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} \text{ و } E = \{M(a,b) / (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

(1) لنبين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{R}), +)$

$$\bullet I = M(1,0) \in E \Rightarrow E \neq \emptyset$$

$$\bullet (\forall (M(a,b), M(c,d)) \in E^2); M(a,b) - M(c,d) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & c-d \\ d & c+d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-c & a-b-c+d \\ b-d & a+b-c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & (a-c)-(b-d) \\ b-d & (a-c)+(b-d) \end{pmatrix} = M(a-c, b-d) \in E$$

و منه حسب الخاصية المميزة للزمرة الجزئية نستنتج أن :

$$\boxed{E \text{ زمرة جزئية للزمرة } (M_2(\mathbb{R}), +)}$$

(2) لدينا $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $1+0 \neq 2$ إذن $J = M(1,0) \in E$ و $J^2 \notin E$ نستنتج أن :

$$\boxed{E \text{ جزء غير مستقر من } (M_2(\mathbb{R}), \times)}$$

(3) أ) لنبين أن φ تشاكل من (\mathbb{C}^*, \times) نحو $(M_2(\mathbb{R}), *)$

لدينا

$$\left(\forall ((a,b), (c,d)) \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})^2 \right); \varphi((a+bi) \times (c+di)) = \varphi(ac-bd + i(ad+bc)) = M(ac-bd, ad+bc)$$

و لدينا

$$\varphi(a+bi) * \varphi(c+di) = M(a,b) * M(c,d) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & c-d \\ d & c+d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & c-d \\ d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ac-ad-bc-bd \\ ad+bc & bc-bd+ac+ad \end{pmatrix} = M(ac-bd, ad+bc)$$

$$\left(\forall ((a,b), (c,d)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \right); \varphi((a+bi) \times (c+di)) = \varphi(a+bi) * \varphi(c+di)$$

و منه

$$\boxed{\varphi \text{ تشاكل من } (\mathbb{C}^*, \times) \text{ نحو } (M_2(\mathbb{R}), *)}$$

ب) لنبين أن $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$ حيث $E^* = E \setminus \{O\}$

$$\text{لدينا: } M(a,b) \in E^* \Leftrightarrow (a,b) \neq (0,0) \Leftrightarrow a+bi \in \mathbb{C}^* \Leftrightarrow \varphi(a+bi) \in \varphi(\mathbb{C}^*) \Leftrightarrow M(a,b) \in \varphi(\mathbb{C}^*)$$

$$\text{إذن } M(a,b) \in E^* \Leftrightarrow M(a,b) \in \varphi(\mathbb{C}^*) \text{ و منه:}$$

$$\boxed{\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*}$$

ج) لنبين أن $(E^*, *)$ زمرة تبادلية

$$\text{لدينا } (\mathbb{C}^*, \times) \text{ زمرة تبادلية و } \varphi \text{ تشاكل من } (\mathbb{C}^*, \times) \text{ نحو } (M_2(\mathbb{R}), *) \text{ إذن } (\varphi(\mathbb{C}^*), *) \text{ زمرة تبادلية و لدينا } \varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$$

نستنتج أن

$$(E^*, *) \text{ زمرة تبادلية}$$

$$(4) \text{ لدينا } (\forall (A, B, C) \in E^3), A * (B + C) = A \times N \times (B + C) = A \times N \times B + A \times N \times C = A * B + A * C$$

إذن

$$(\forall (A, B, C) \in E^3), A * (B + C) = A * B + A * C$$

(5) نستنتج مما سبق أن $(E, +, *)$ جسم تبادلي.

لدينا حسب (1) زمرة وحدتها O ولدينا حسب (3) ج $(E^*, *)$ زمرة تبادلية كما لدينا حسب (4) القانون * توزيعي على القانون + نستنتج أن

$$(E, +, *) \text{ جسم تبادلي}$$

التمرين الثالث

$$(1) \text{ أ) لنتحقق من أن مميز المعادلة } (E) \text{ هو } \Delta = (\sqrt{2}ie^{i\theta})^2$$

$$\Delta = (\sqrt{2}e^{i\theta})^2 - 4e^{2i\theta} = 2e^{2i\theta} - 4e^{2i\theta} = -2e^{2i\theta} = (\sqrt{2}ie^{i\theta})^2 \text{ إذن } (E): z^2 - \sqrt{2}ie^{i\theta}z + e^{2i\theta} = 0$$

ومنه

$$\Delta = (\sqrt{2}ie^{i\theta})^2$$

(ب) لنكتب الحلين z_1 و z_2 على الشكل المثالي

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}e^{i\theta} - \sqrt{2}ie^{i\theta}}{2} = \left[1, -\frac{\pi}{4}\right] \times [1, \theta] = \left[1, \theta - \frac{\pi}{4}\right]$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}e^{i\theta} + \sqrt{2}ie^{i\theta}}{2} = \left[1, \frac{\pi}{4}\right] \times [1, \theta] = \left[1, \theta + \frac{\pi}{4}\right] \text{ و منه}$$

$$z_1 = \left[1, \frac{\pi}{4} - \theta\right] \text{ و } z_2 = \left[1, \frac{\pi}{4} + \theta\right]$$

(2) أ) لنبين أن المستقيمين (OA) و (T_1T_2) متعامدان :

$$\frac{e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})} - e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2}e^{i\theta}} = \frac{-2i \sin \frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}} = -i = \left[1, -\frac{\pi}{2}\right] \text{ و } \overline{(OA, T_1T_2)} \equiv \text{Arg} \left(\frac{\text{aff}(\overline{T_1T_2})}{\text{aff}(\overline{OA})} \right) \equiv (2\pi)$$

إذن $\overline{(OA, T_1T_2)} \equiv -\frac{\pi}{2}(2\pi)$ أي أن $\overline{OA} \perp \overline{T_1T_2}$ و منه

$$\text{المستقيمين } (OA) \text{ و } (T_1T_2) \text{ متعامدين}$$

(ب) لنبين أن النقط O, A, K مستقيمية

$$\frac{\text{aff}(\overline{OK})}{\text{aff}(\overline{OA})} = \frac{e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})} + e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})}}{2\sqrt{2}e^{i\theta}} = \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} = \left[\frac{1}{2}, 0\right] \text{ و } \overline{(OA, OK)} \equiv \text{Arg} \left(\frac{\text{aff}(\overline{OK})}{\text{aff}(\overline{OA})} \right) \equiv (2\pi)$$

إذن $\overline{(OA, OK)} \equiv 0(2\pi)$ أي أن المتجهتين \overline{OA} و \overline{OK} مستقيمتين و منه

$$\text{النقط } O \text{ و } A \text{ و } K \text{ مستقيمية}$$

(ج) نستنتج أن المستقيم (OA) هو واسط القطعة $[T_1T_2]$

لدينا (OA) عمودي على (T_1T_2) و لدينا K منتصف القطعة $[T_1T_2]$ و $K \in (OA)$ نستنتج أن

(OA) هو واسط القطعة $[T_1T_2]$

(3) أ) الصيغة العقدية للدوران r

لدينا $z' - e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{\pi}{2}} \left(z - e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})} \right)$ يكافئ $z' - e^{i(\theta+\frac{3\pi}{4})} = e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})} + e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}$ يكافئ $z' = iz + \sqrt{2}e^{i\theta}$

الصيغة العقدية للدوران r هي

$$z' = iz + \sqrt{2}e^{i\theta}$$

(ب) نتحقق من أن لحق النقطة B صورة النقطة I بالدوران r هو $b = \sqrt{2}e^{i\theta} + 1$ لدينا $b = i \times 1 + \sqrt{2}e^{i\theta} = \sqrt{2}e^{i\theta} + i$ ومنه

$$b = \sqrt{2}e^{i\theta} + 1$$

(ج) لدينا $(2\pi) \equiv \text{Arg} \left(\frac{\text{aff}(\overline{AB})}{\text{aff}(\overline{IJ})} \right)$ و $\left[\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2} \right]$ $\frac{b - \sqrt{2}e^{i\theta}}{-2} = \frac{-i}{2}$

إذن $(\overline{IJ}, \overline{AB}) \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi)$ أي أن و بالتالي

المستقيمين (AB) و (IJ) متعامدين

(4) لدينا $z_C - \sqrt{2}e^{i\theta} = -i \Leftrightarrow z_C = -i + \sqrt{2}e^{i\theta}$

و منه لحق النقطة C صورة النقطة A بالإزاحة ذات المتجهة $-\vec{v}$ هو

$$z_C = -i + \sqrt{2}e^{i\theta}$$

(5) لدينا $z_A = \sqrt{2}e^{i\theta} = \frac{z_C + z_B}{2} = \frac{-i + \sqrt{2}e^{i\theta} + i + \sqrt{2}e^{i\theta}}{2}$

إذن

A هي منتصف القطعة $[BC]$

التمرين الرابع

$$(I) \quad f \text{ الدالة المعرفة على }]0, +\infty[\text{ كما يلي: } \begin{cases} f(x) = \frac{-x \ln x}{1+x^2}; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(1) أ) الدالة \ln متصلة على $]0, +\infty[$ و الدالة $x \mapsto \frac{-x}{1+x^2}$ متصلة على \mathbb{R} (دالة جذرية معرفة على \mathbb{R}) و بالخصوص على $]0, +\infty[$

إذن الدالة f متصلة على $]0, +\infty[$ (جاء دالتين متصلتين)

لندرس اتصال f على اليمين في 0 : $f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x \ln x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ (لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$)

إذن f متصلة على يمين 0

Ammarimaths

 f متصلة على $]0, +\infty[$ و متصلة على يمين 0 نستنتج أن

$$f \text{ متصلة على المجال }]0, +\infty[$$

(ب) لندرس إشارة f على المجال $]0, +\infty[$ لدينا $f(0) = 0$ و لكل $x > 0$ إشارة $f(x)$ هي عكس إشارة $\ln x$ ومنه جدول إشارة $f(x)$ كما يلي:

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$		-	+
$f(x)$	0	+	-

(2) (أ) لدينا :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-\frac{1}{x} \ln \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\ln x}{x + \frac{1}{x}} = \frac{x \ln x}{x^2 + 1} = -f(x)$$

ومنه

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

(ب) لنبين أن الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$ الدالة \ln قابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$ والدالة $x \mapsto \frac{-x}{1+x^2}$ قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} وبالخصوص على $]0, +\infty[$ إذن الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$ (كجاء دالتين قابلتين للإشتقاق على هذا المجال)(ج) لنبين أنه يوجد α من المجال $]0, 1[$ يحقق $f'(\alpha) = 0$ الدالة f متصلة على المجال $]0, 1[$ وقابلة للإشتقاق على المجال $]0, 1[$ وتحقق $f(0) = f(1)$ إذن حسب مبرهنة رول يوجد على الأقل عنصر α من المجال $]0, 1[$ يحقق $f'(\alpha) = 0$ إذن

$$(\exists \alpha \in]0, 1[); f'(\alpha) = 0$$

(د) لنستنتج أن $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$ بما أن $\alpha \in]0, 1[$ فإن $\frac{1}{\alpha} \in]1, +\infty[$ إذن f قابلة للإشتقاق عند $\frac{1}{\alpha}$ ولدينا حسب (2) (أ) $(\forall x \in \mathbb{R}^*), f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$ نستنتج أن $(\forall x \in \mathbb{R}^*), f'(x) = -f'\left(\frac{1}{x}\right) \times \frac{-1}{x^2}$ ومنه $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha^2} f'(\alpha) = 0$ إذن $(\forall x \in \mathbb{R}^*), f'\left(\frac{1}{x}\right) = f'(x) \times \frac{1}{x^2}$

الصفحة (5)

Ammarimaths

و منه

$$f' \left(\frac{1}{\alpha} \right) = 0$$

(II) F دالة معرفة على المجال $[0, +\infty[$ ب: $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ و (C) مبيهاها في معلم متعامد ممنظم.

$$(1) \quad (\forall t \in [1, +\infty[); \frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1 \text{ نتحقق من أن}$$

$$\text{لدينا } (\forall t \in [1, +\infty[); 0 \leq 1 \leq t^2 \Rightarrow t^2 \leq 1+t^2 \leq 2t^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$$

و منه

$$(\forall t \in [1, +\infty[); \frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$$

$$(ب) \text{ لنبين أن } (\forall x \in [1, +\infty[), F(1) - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) - \frac{1}{4}(\ln x)^2$$

انطلاقا من المتفاوتة المزدوجة السابقة لدينا الاستلزامات المتوالية التالية:

$$(\forall t \in [1, +\infty[); \left(\frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1 \right) \xrightarrow{\left(\frac{\ln t}{t} > 0 \right)} \left(\frac{1}{2} \frac{\ln t}{t} \leq \frac{t \ln t}{1+t^2} \leq \frac{\ln t}{t} \right) \xrightarrow{(x \geq 1)} \left(\int_1^x \frac{1}{2} \frac{\ln t}{t} dt \leq \int_1^x \frac{t \ln t}{1+t^2} dt \leq \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt \right)$$

$$\text{و حيث أن } (\forall t \in [1, +\infty[); -\frac{(\ln x)^2}{2} \leq -\int_1^x \frac{t \ln t}{1+t^2} dt \leq -\frac{(\ln x)^2}{4} \text{ فإن } \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt = \left[\frac{(\ln t)^2}{2} \right]_1^x = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

وبعد إضافة $F(1)$ إلى أطراف المتفاوتة المزدوجة الأخيرة نحصل على

$$(\forall t \in [1, +\infty[); F(1) - \frac{(\ln x)^2}{2} \leq F(1) - \int_1^x \frac{t \ln t}{1+t^2} dt \leq F(1) - \frac{(\ln x)^2}{4}$$

و بملاحظة أن $F(1) - \int_1^x \frac{t \ln t}{1+t^2} dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt = \int_0^x f(t) dt = F(x)$ نحصل على المطلوب:

$$(\forall x \in [1, +\infty[), F(1) - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) - \frac{1}{4}(\ln x)^2$$

(ج) الحساب و التأويل الهندسي للنهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

لدينا حسب خاصيات النهايات و الترتيب

$$\begin{cases} (\forall x \in [1, +\infty[), F(x) \leq F(1) - \frac{1}{4}(\ln x)^2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} F(1) - \frac{1}{4}(\ln x)^2 = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\infty$$

$$\begin{cases} (\forall x \in [1, +\infty[), \frac{F(1)}{x} - \frac{1}{2} \frac{(\ln x)^2}{x} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{F(1)}{x} - \frac{1}{4} \frac{(\ln x)^2}{x} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(1)}{x} - \frac{1}{2} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(1)}{x} - \frac{1}{4} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$$

خلاصة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\infty \text{ إذن } (C) \text{ يقبل فرعا شلجيميا في إتجاه محور الأفاصيل بجوار } +\infty$$

Ammarimaths

(2) (أ) قابلية اشتقاق الدالة F على المجال $[0, +\infty[$ وحساب F'

بما أن f متصلة على المجال $[0, +\infty[$ فإن F هي أصليتها التي تنعدم عند 0 و منه F قابلة للاشتقاق على المجال $[0, +\infty[$ ولدينا $(\forall x \in [0, +\infty[); F'(x) = f(x)$

F قابلة للاشتقاق على المجال $[0, +\infty[$ ولدينا $(\forall x \in [0, +\infty[); F'(x) = f(x)$

(ب) نعم حسب (1) (أ) من الجزء الأول أن $f(x) > 0$ على المجال $]0, 1[$ و $f(x) < 0$ على المجال $]1, +\infty[$ إذن جدول تغيرات الدالة F كما يلي

x	0	1	$+\infty$
$F(x)$	0	$F(1)$	$-\infty$

(III) (1) (أ) لنبين أن $(\forall t \in]0, +\infty[); -t \ln t \leq \frac{1}{e}$

نضع $(\forall t \in]0, +\infty[); \varphi(t) = 1 + e.t \ln t$

لدينا $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = +\infty$ و $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 1$ و $\varphi'(t) = e.(1 + \ln t)$

إذن جدول تغيرات الدالة φ كما يلي

x	0	$1/e$	$+\infty$
$\varphi(x)$ <td>1</td> <td>0</td> <td>$+\infty$</td>	1	0	$+\infty$

من جدول تغيرات الدالة φ نستنتج أن $(\forall t \in]0, +\infty[); \varphi(t) \geq 0$

$(\forall t \in]0, +\infty[); -t \ln t \leq \frac{1}{e}$

(ب) لنبين أن: $(\forall t \in [0, +\infty[); f(t) \leq \frac{1}{e}$

إذا كان $t \geq 1$ فإن $\left(\frac{-t \ln t}{1+t^2} \leq 0 < \frac{1}{e}\right)$ و إذا كان $0 < t < 1$ فإن $\left(\frac{1}{1+t^2} < 1 \Rightarrow \frac{-t \ln t}{1+t^2} < \frac{1}{e} \Rightarrow f(t) < \frac{1}{e}\right)$

ومن أجل $t = 0$: $f(0) = 0 < \frac{1}{e}$ نستنتج أن

$(\forall t \in [0, +\infty[); f(t) < \frac{1}{e}$

Ammarimaths

(ج) استنتاج أن $(\forall x \in]0, +\infty[); F(x) < x$ لدينا $(\forall t \in [0, +\infty[); f(t) < \frac{1}{e} \Rightarrow (\forall x > 0); \int_0^x f(t) dt \leq \int_0^x \frac{1}{e} dt$ و لدينا $\int_0^x \frac{1}{e} dt = \frac{1}{e} [t]_0^x = \frac{x}{e} < x$ إذن

$$(\forall x \in]0, +\infty[); F(x) < x$$

(2)

$$\begin{cases} u_0 \in]0, 1[\\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = F(u_n) \end{cases} : (u_n) \text{ متتالية معرفة ب :}$$

(أ) لنبين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \in]0, 1[$ برهان بالترجع : لدينا $u_0 \in]0, 1[$ إذن العلاقة صحيحة من أجل $n = 0$ ليكن n من \mathbb{N} نفترض أن $u_n \in]0, 1[$ بما أن F تزايدية قطعاً على المجال $]0, 1[$ فإن $0 < u_{n+1} < 1 \Rightarrow 0 < u_n < 1 \Rightarrow F(0) < F(u_n) < F(1) < 1 \Rightarrow 0 < u_{n+1} < 1$ إذن $u_{n+1} \in]0, 1[$. نستنتج (حسب مبدأ التراجع) أن

$$(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \in]0, 1[$$

(ب) لنبين أن المتتالية تناقصية قطعاً ثم نستنتج أنها متقاربة

بما أن $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \in]0, 1[$ فإن $(\forall n \in \mathbb{N}); F(u_n) < u_n$ (حسب III 1 ج)و منه $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} < u_n$ إذن المتتالية (u_n) تناقصية قطعاً (u_n) تناقصية و مصغرة ب 0 إذن متقاربة

$$(u_n) \text{ متقاربة}$$

(ج) لنحسب نهاية المتتالية (u_n) نضع $I =]0, 1[$ الدالة F متصلة على I ولدينا $I \subset]0, \frac{1}{e}[\subset I$

$$\begin{cases} u_0 \in]0, 1[\\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = F(u_n) \\ (u_n) \text{ converge} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim u_n = l \\ F(l) = l \\ l \in I \cup \{0\} \end{cases} \text{ إذن}$$

لنحل في $I \cup \{0\}$ المعادلة $F(l) = l$ نعلم أن $(\forall x \in]0, +\infty[); F(x) < x$ إذن المعادلة ليس لها حل في I و بالتالي حلها الوحيد هو 0

$$\lim u_n = 0$$

Ammarimaths

التمرين الخامس

$$g \text{ الدالة المعرفة على }]0, +\infty[\text{ بما يلي } \begin{cases} g(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}; x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

(1) لنبين أن الدالة g متصلة على $]0, +\infty[$

الدالتان $x \mapsto \frac{-1}{x}$ و $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ متصلتان على $]0, +\infty[$ و الدالة exp متصلة على \mathbb{R} إذن الدالة $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ متصلة على $]0, +\infty[$

و بالتالي الدالة $x \mapsto \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ متصلة على $]0, +\infty[$ [يعني الدالة g متصلة على $]0, +\infty[$

لندرس اتصال الدالة g على اليمين في 0

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} t^2 e^t = 0 = g(0) \text{ إذن } g \text{ متصلة على اليمين في } 0$$

نستنتج أن الدالة g متصلة على $]0, +\infty[$

$$\forall (x \in]0, +\infty[); L(x) = \int_0^x g(t) dt \quad (2)$$

(أ) لنبين أن الدالة L متصلة على $]0, +\infty[$

بما أن الدالة g متصلة على $]0, +\infty[$ فإنها تقبل دوالاً أصلية عليه و دالتها الأصلية التي تنعدم عند 0 هي $\int_0^x g(t) dt$

إذن L هي أصلية g على المجال $]0, +\infty[$ و تحقق $L(0) = 0$

ومنه L قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ما يعني أنها متصلة على $]0, +\infty[$

الدالة L متصلة على المجال $]0, +\infty[$ (ب) لنحسب $L(x)$ من أجل $x > 0$

لدينا $(\forall x > 0); L(x) = \int_0^x g(t) dt = [G(t)]_0^x = G(x) - G(0)$ حيث G أصلية ل g

$$\begin{cases} G(x) = e^{-\frac{1}{x}}; x > 0 \\ G(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 \end{cases} \text{ و بما أن } G \text{ متصلة على }]0, +\infty[\text{ فإن } G \text{ معرفة كما يلي}$$

نستنتج أن

$$(\forall x > 0); L(x) = e^{-\frac{1}{x}}$$

Ammarimaths

ج) لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ و بما أن L متصلة على اليمين في 0 فإن $L(0) = 0$

(3) لنبين أن المتتالية $(s_n)_{n \geq 1}$ متقاربة و لنحدد نهايتها

$$\text{لدينا } (\forall n \in \mathbb{N}^*); s_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{p=n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$$

بما أن الدالة g متصلة على المجال $[0,1]$ فإن المتتالية $(s_n)_{n \geq 1}$ متقاربة و لدينا $\lim s_n = \int_0^1 g(t) dt = L(1) = \frac{1}{e}$

$$\lim s_n = \frac{1}{e}$$

إضافة

مبيان الدوال f و L

