الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا 2015 - الدورة الاستدراكية -

الشعب (ة) أو المسلك: شعبة العلوم التجريبية بمسالكها

مادة الرياضيات

تمرين رقم 1

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_n=4$ و $u_{n+1}=\frac{2}{5}u_n+3$ لكل n من IN

1- بين بالترجع أن $u_n<5$ لكل n من IN

2- تحقق من أن $u_{n+1}-u_n=\frac{3}{5}(5-u_n)$ لكل n من IN ثم استنتج أن المتتالية (u_n) تزايدية .

3- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

4- لتكن (v_n) المتتالية العددية بحيث $v_n=5-u_n$ لكل n من IN

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ ثم اكتب v_n بدلالة n

ب- استنتج أن $u_n=5-\left(\frac{2}{5}\right)^n$ لكل n من IN و احسب نهاية المتتالية (u_n) .

تمرين رقم 2

نعتبر ، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، المستوى (P) الذي معادلته $2x-z-2=0$ و الفلكة (S) التي معادلتها $x2+y2+z2+2x-2z-7=0$

1- بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(-1,0,1)$ و أن شعاعها هو 3

2- أ- أحسب مسافة النقطة Ω عن المستوى (P)

ب- استنتج أن المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ)

3- بين أن شعاع الدائرة (Γ) هو 2 و حدد مثلوث إحداثيات النقطة H مركز الدائرة (Γ)

تمرين رقم 3

1- أ- حل في مجموعة الأعدادالعقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8z+32=0$

ب- نعتبر العدد العقدي a بحيث $a=4+4i$

اكتب العدد العقدي a على الشكل المثلث ثم استنتج أن a^{12} عدد حقيقي سالب .

2- نعتبر في المستوى العقدي إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي a و b و c بحيث $a=4+4i$ و $b=2+3i$ و $c=3+4i$

ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه C و زاويته $\frac{\pi}{2}$

أ- بين أن $z'=iz+7+i$

ب- تحقق من أن d لحق النقطة D صورة النقطة A بالدوران R هو $3+5i$

ج- بين أن مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث $|z-4-4i|=|z-3-5i|$ هي المستقيم (BC)

تمرين رقم 4

يحتوي صندوق على 5 بيدقتان بيضاوان و بيدقتان خضروان و بيدقة حمراء واحدة (لا يمكن التمييز بين البيدقات باللمس).
نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال ثلاث بيدقات من الصندوق .

1 -ليكن A الحدث : «البيدقات الثلاث المسحوبة من نفس اللون» .

- بين أن $p(A) = \frac{17}{125}$

2 -ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد البيدقات البيضاء المسحوبة .

- حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X .

تمرين رقم 5

I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = 1 - x + x\ln x$

1 -أ- بين أن $g'(x) = \ln x$ لكل x من $]0, +\infty[$

ب- بين أن الدالة g تناقصية على $]0,1]$ و تزايدية على $[1, +\infty[$

2 -أحسب $g(1)$ و استنتج أن $g(x) \geq 0$ لكل x من $]0, +\infty[$

II-نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة : $1cm$)

1 -بين أن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ و أول هندسيا النتيجة

(لحساب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$ لاحظ أن $f(x) = \frac{3x^2 - 1 - 2x\ln x}{x^2}$ لكل x من $]0, +\infty[$)

2 -بين أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ و استنتج طبيعة الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

3 -أ- بين أن $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$ لكل x من $]0, +\infty[$

ب- أول هندسيا النتيجة $f'(1) = 0$

ج- بين أن الدالة f تزايدية على $]0, +\infty[$

4 -أنشئ ، في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ، المنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطتي انعطاف أفصول إحداهما 1 و أفصول الأخرى محصور بين 2 و 2.5 و نأخذ $f(0,3) = 0$)

5 -أ- بين أن $\int_1^e \frac{2\ln x}{x} dx = 1$

ب-أحسب ، ب cm^2 ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$

6 -لتكن h الدالة العددية المعرفة على IR^* بما يلي : $h(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x^2)}{|x|}$

أ- بين أن الدالة h زوجية و أن $h(x) = f(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$

ب- أنشئ، في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ، المنحنى (C') الممثل للدالة h .

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا 2015 - الدورة الاستدراكية -

الشعب (ة) أو المسلك: شعبة العلوم التجريبية بمسالكها

مادة الرياضيات

تمرين رقم 1

1 - لنبين بالترجع أن : $(\forall n \in IN)\ ;\ U_n < 5$

من أجل $n=0$ لدينا $U_0=4$ و $4 < 5$

إذن : $U_n < 5$

نفترض أن $U_n < 5$ و لنبين أن : $U_{n+1} < 5$

لدينا :

$$U_{n+1} - 5 = \frac{2}{5}U_n + 3 - 5$$
$$= \frac{2}{5}U_n - 2$$
$$= \frac{2}{5}(U_n - 5)$$

و بما أن $U_n < 5$ فإن $U_n - 5 < 0$

و منه $U_{n+1} - 5 < 0$ أي $U_{n+1} < 5$

و بالتالي : $(\forall n \in IN)\ ;\ U_n < 5$

2 - * التحقق من المتساوية :

$$(\forall n \in IN)\ ;\ U_{n+1} - U_n = \frac{2}{5}U_n + 3 - U_n$$
$$= \left(\frac{2}{5} - 1\right)U_n + 3$$
$$= -\frac{3}{5}U_n + 3$$
$$= \frac{3}{5}(5 - U_n)$$

* استنتاج :

نعلم أن $(\forall n \in IN)\ ;\ U_n < 5$

و منه : $(\forall n \in IN)\ ;\ 5 - U_n > 0$

إذن : $(\forall n \in IN)\ ;\ U_{n+1} - U_n > 0$

و هذا يعني أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية قطعا .

3 -بما أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية و مكبورة بالعدد 5 ، فإنها متقاربة .

4 -أ- * لنبين أن $(V_n)_n$ هندسية

$$(\forall n \in IN)\ ;\ V_{n+1} = 5 - U_{n+1}$$
$$= 5 - \frac{2}{5}U_n - 3$$
$$= 2 - \frac{2}{5}U_n$$
$$= \frac{2}{5}(5 - U_n)$$
$$V_{n+1} = \frac{2}{5}.V_n$$

و منه المتتالية $(V_n)_n$ هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ و حدها الأول :

$$V_0 = 5 - U_0 = 5 - 4 = 1$$

* V_n بدلالة n :

بما أن المتتالية $(V_n)_n$ هندسية فإن :

$$(\forall n \in IN)\ ;\ V_n = V_0.q^n$$
$$(\forall n \in IN)\ ;\ V_n = 1.\left(\frac{2}{5}\right)^n$$
$$(\forall n \in IN)\ ;\ V_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

ب- استنتاج :

لدينا : $(\forall n \in IN)\ ;\ V_n = 5 - U_n$

و منه : $(\forall n \in IN)\ ;\ U_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$

نهاية $(U_n)_n$:

لدينا : $(\forall n \in IN)\ ;\ U_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$

و بما أن : $\lim\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

لأن : $-1 < \frac{2}{5} < 1$

فإن : $\lim U_n = 5$

تمرين رقم 2

1 -لدينا : معادلة (S) هي :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$$

و منه :

$$(x+1)^2 - 1 + y^2 + (z-1)^2 - 1 - 7 = 0$$

أي :

$$(x+1)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = 3^2$$

و منه مركز (S) هو النقطة $\Omega(-1,0,1)$ و شعاعها هو $R=3$

2 -أ- حساب المسافة

$$d(\Omega,(P)) = \frac{|2x_\Omega - z_\Omega - 2|}{\sqrt{4+1}}$$

$$= \frac{|-2-1-2|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

ب- استنتاج :

لدينا : $d(\Omega,(P)) = \sqrt{5}$ و $R = 3$

وبما أن : $\sqrt{5} < 3$ (لأن $5 < 9$)

فإن : $d(\Omega,(P)) < R$

و منه المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ)

3 -ليكن r شعاع الدائرة (Γ)

نعلم أن : $r = \sqrt{R^2 - d(\Omega,(P))^2}$

فإن : $r = \sqrt{9-5} = 2$

* إحداثيات H مركز الدائرة (Γ)

لدينا H هي تقاطع المستوى (P) و المستقيم (Δ) المار من Ω و العمودي على المستوى (P) (لأن H هي المسقط العمودي ل Ω على (P))

لدينا $(P) \perp (\Delta)$ إذن (Δ) موجه بالمتجهة $\vec{n}_p(2,0,-1)$ المنظمية على (P)

و منه تمثيل بارامتري لـ (Δ) هو النظمة

$$\begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = 0 \\ z = 1 - k \end{cases} \quad (k \in IR)$$

$$H \in (P) \Leftrightarrow 2x_H - z_H - 2 = 0 \quad (1)$$

$$H \in (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -1 + 2k \\ y_H = 0 \\ z_H = 1 - k \end{cases}$$

نعوض x_H و y_H و z_H في (1) نجد :

$$-2(1+2k) - (1-k) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 + 4k - 1 + k - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5k = 5$$

$$\Leftrightarrow k = 1$$

إذن : $\begin{cases} x_H = -1 + 2 = 1 \\ y_H = 0 \\ z_H = 1 - 1 = 0 \end{cases}$

أي : $H(1,0,0)$

تمرين رقم 3

1 -أ- حل المعادلة : $z^2 - 8z + 32 = 0$

لدينا : $\Delta = 64 - 128 = -64$

و منه : $z_1 = \frac{8+8i}{2} = 4 + 4i$

و $z_2 = \overline{z_1} = 4 + 4i$

و منه : $S = \{4 - 4i \,, 4 + 4i\}$

ب- * لدينا : $a = 4 + 4i$

و منه : $|a| = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$

إذن : $a = 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$a = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

إذن : $a = \left[4\sqrt{2}\,,\frac{\pi}{4}\right]$

* استنتاج :

$$a^{12} = \left[4\sqrt{2}\,,\frac{\pi}{4}\right]^{12}$$

$$= \left[(4\sqrt{2})^{12}; 12\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= [2^{30}; 3\pi] = [2^{30}; 3]$$

$$= 2^{30}(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$= -2^{30}$$

إذن : $a^{12} \in IR^-$

2 -أ- لدينا :

$$M' = R(M) \Leftrightarrow z' - c = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - c)$$

$$\Leftrightarrow z' - c = i(z - c)$$

$$\Leftrightarrow z' = iz - ic + c$$

$$\Leftrightarrow z' = iz + (1 - i)c$$

$$\Leftrightarrow z' = iz + (1 - i)(3 + 4i)$$

$$\Leftrightarrow z' = iz + 3 + 4i - 3i + 4$$

$$\Leftrightarrow z' = iz + 7 + i$$

ب- لدينا D صورة A بالدوران R

إذن : $D = R(A) \Leftrightarrow d = ia + 7 + i$

$\Leftrightarrow d = i(4 + 4i) + 7 + i$

$\Leftrightarrow d = 4i - 4 + 7 + i$

$\Leftrightarrow d = 3 + 5i$

ج- __طريقة (1)__ :

$|z - 3 - 5i| = |z - 4 - 4i|$

$\Leftrightarrow |z - (3 + 5i)| = |z - (4 + 4i)|$

$\Leftrightarrow |z_M - z_D| = |z_M - z_A|$

$\Leftrightarrow DM = AM$

إذن المجموعة المطلوبة هي واسط القطعة $[AD]$

بما أن المثلث ACD قائم الزاوية و متساوي الساقين في C

(لأن $R(A) = D$)

فإن واسط القطعة $[AD]$ يمر من C

و بما أن : $AB = |b - a| = |-2 - i| = \sqrt{5}$

$DB = |b - d| = |-1 - 2i| = \sqrt{5}$

أي : $AB = DB$

فإن واسط القطعة $[AD]$ يمر أيضا من B .

إذن واسط القطعة $[AD]$ هو المسقيم (BC) .

__طريقة (2)__ :

نضع : $z = x + iy \quad (x \in IR \ , \ y \in IR)$

و منه : $|z - 3 - 5i| = |z - 4 - 4i|$

$\Leftrightarrow |x + iy - 3 - 5i| = |x + iy - 4 - 4i|$

$\Leftrightarrow |(x - 3) + i(y - 5)| = |(x - 4) + i(y - 4)|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2}$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-5)^2 = (x-4)^2 + (y-4)^2$

$\Leftrightarrow -6x + 9 - 10y + 25 = -8x + 16 - 8y + 16$

$\Leftrightarrow 2x - 2y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x - y + 1 = 0$

إذن المجموعة المطلوبة هي المستقيم (Δ) الذي معادلته هي :

$x - y + 1 = 0$

و بما أن $C \in (\Delta)$ و $B \in (\Delta)$

(نتحقق من ذلك بالإحداثيات)

فإن : $(\Delta) = (BC)$

تمرين رقم 4

ليكن Ω كون الإمكانيات

بما أن السحب بتتابع و بإحلال

فإن كل سحبة هي ترتيبة بتكرار .

و منه : $Card\Omega = 5^3 = 125$

1- احتمال الحدث A :

لدينا : $A = \{BBB \, ; VVV \, ; RRR\}$

و منه : $CardA = 2^3 + 2^3 + 1^3$

$= 17$

إذن :

$$p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{17}{125}$$

2- * قيم X :

نوع السحبات	قيمة X
$\overline{B}\,\overline{B}\,\overline{B}$	0
$\overline{B}\,\overline{B}\,B$	1
$\overline{B}\,B\,B$	2
$B\,B\,B$	3

و منه $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

* قانون احتمال X :

$$p(X = 0) = \frac{3^3}{125} = \frac{27}{125}$$

$$p(X = 1) = \frac{3.2^1.3^2}{125} = \frac{54}{125}$$

$$p(X = 2) = \frac{3.2^2.3^1}{125} = \frac{36}{125}$$

$$p(X = 3) = \frac{2^3}{125} = \frac{8}{125}$$

نتحقق بسرعة أن :

$$p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) = 1$$

تمرين رقم 5

I -

1 - أ- $\forall x \in]0, +\infty[\,;\, g'(x) = (1 - x + x\ln x)'$

$$g'(x) = -1 + (1 + \ln x)$$
$$= \ln x$$

ب- إشارة $g'(x)$ هي إشارة $\ln x$

وبما أن $\forall x \in]0,1] \;;\; \ln(x) \leqslant 0$

فإن : $\forall x \in]0,1] \;;\; g'(x) \leqslant 0$

إذن g تناقصية على المجال $]0,1]$

وبما أن $\forall x \in [1, +\infty[\;;\; \ln(x) \geqslant 0$

فإن : $\forall x \in [1, +\infty[\;;\; g'(x) \geqslant 0$

إذن g تزايدية على المجال $[1; +\infty[$

2 - * $g(1) = 1 - 1 + 1\ln 1 = 0$

* لدينا g تقبل قيمة دنيا هي $g(1)$ على $]0; +\infty[$

إذن $\forall x \in]0, +\infty[\;;\; g(x) \geqslant g(1)$

ومنه $\forall x \in]0, +\infty[\;;\; g(x) \geqslant 0$

II -

1 - * $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 3 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{\ln x}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0^+} 3 - \frac{1}{x^2}(1 + 2x\ln x)$$
$$= -\infty$$

لأن $\left(\lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{x^2} = -\infty \right.$ و $\left. \lim_{x \to 0^+} 1 + 2x\ln x = 1 \right)$

* هندسيا :

(C) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=0$

2 - لدينا : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 3 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{\ln x}{x} = 3$

(لأن : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)

هندسيا (C) يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y=3$ بجوار $+\infty$

3 - أ- لنبين أن :

$$\forall x \in]0; +\infty[\;;\; f(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$$

لدينا : $\forall x \in]0, +\infty[;$

$$f'(x) = \left(3 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{\ln x}{x}\right)'$$
$$= \frac{2x}{x^4} - 2\frac{1 - \ln x}{x^2}$$
$$= \frac{2}{x^3} - 2\left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)$$
$$= \frac{2}{x^3}(1 - x + x\ln x)$$
$$= \frac{2}{x^3}\, g(x)$$

ب- $f'(1) = \frac{2}{1^3} \cdot g(1) = 0$

ومنه (C) يقبل مماسا أفقيا في النقطة التي أفصولها 1 .

ج- لدينا : $\forall x \in]0; +\infty[\;;\; f'(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$

وبما أن $\frac{2}{x^3} > 0$ و $g(x) \geqslant 0$

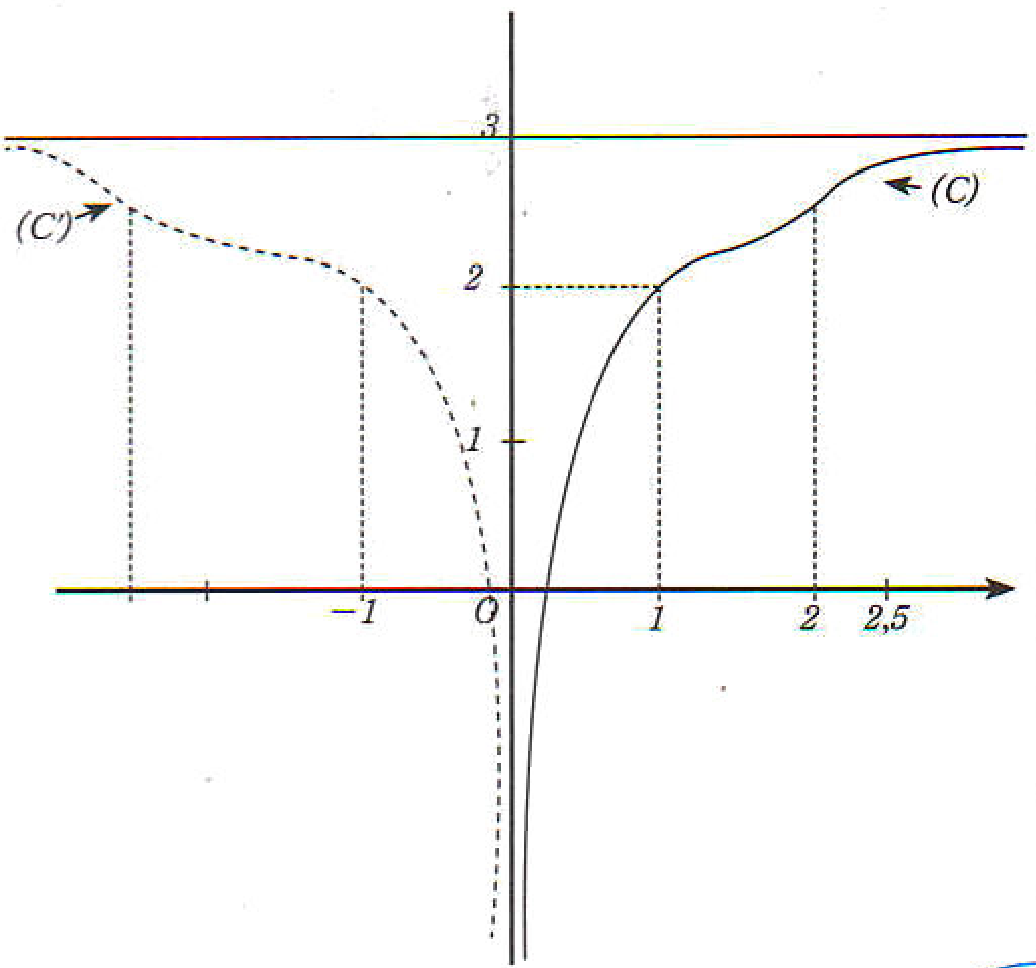
لكل x من المجال $]0; +\infty[$

فإن $\forall x \in]0; +\infty[\;;\; f'(x) \geqslant 0$

إذن f تزايدية على $]0; +\infty[$

4 - إنشاء (C) : - جدول تغيرات f هو:

x		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3



5 -أ- لنبين أن $\int_1^e \frac{2\ln x}{x}dx = 1$

$$\int_1^e \frac{2\ln(x)}{x}dx = 2\int_1^e \frac{1}{x}\ln x\, dx$$
$$= 2\ln'(x).(\ln x)^1\, dx$$
$$= [\ln^2(x)]_1^e$$
$$= \ln^2(e) - \ln^2(1) = 1$$

ب- المساحة المطلوبة هي :

$$A = \int_1^e |f(x)|dx \ (ua)$$

وبما أن $\forall x \in [1,e]\ ;\ f(x) > 0$

فإن :

$$A = \int_1^e f(x)dx \ (ua)$$
$$= \int_1^e \left(3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}\right)dx \ (ua)$$
$$= \left(\int_1^e \left(3 - \frac{1}{x^2}\right)dx - \int_1^e \left(\frac{2\ln x}{x}\right)dx\right) \ (ua)$$
$$A = \left(\left[3x + \frac{1}{x}\right]_1^e - 2\right) \ (ua)$$
$$= \left(3e + \frac{1}{e} - 4 - 2\right) \ (ua)$$
$$= \left(\frac{3e^2 + 1 - 6e}{e}\right)cm^2$$

6 -أ- لنبين أن الدالة h زوجية .

لدينا : لكل x من IR^* , $-x$ ينتمي إلى IR^*

ولدينا :

$$h(-x) = 3 - \frac{1}{(-x)^2} - \frac{\ln((-x)^2)}{|-x|}$$
$$= 3 - \frac{1}{-x^2} - \frac{\ln x^2}{|x|}$$
$$= h(x)$$

ومنه المطلوب .

* لكل x من IR^{*+} لدينا $|x| = x$

و $\ln(x^2) = 2\ln x$

إذن

$$h(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}$$
$$= f(x)$$

ب- إنشاء (C') منحنى h

لدينا : $\forall x \in]0, +\infty[\ ;\ h(x) = f(x)$

ومنه (C') هو (C) على المجال $]0, +\infty[$.

و h زوجية ، إذن (C') متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب .

إنشاء (C') انظر الشكل .