

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2015
- الموضوع -

RS 24

ⵜⴰⴷⵓⴷⴰ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ | ⵏ ⵏⵓⵔⵉⵏ
ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ | ⵏ ⵏⵓⵔⵉⵏ ⵏ ⵏⵓⵔⵉⵏ
ⵏ ⵏⵓⵔⵉⵏ ⵏ ⵏⵓⵔⵉⵏ



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنى الجبرية.....(4 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات و حساب الاحتمالات.....(3 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية.....(3 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(6 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(4 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (4 نقط)

الجزء الأول: نزود ، بقانون التركيب الداخلي * المعرف بما يلي:

$$x * y = x + y - e^{-xy} + 1 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

1-أ) بين أن القانون * تبادلي في ،

0.25

ب) بين أن القانون * يقبل عنصرا محايدا يتم تحديده.

0.5

2- علما أن المعادلة: $3 + x - e^{2x} = 0$ (E) تقبل في ، حلين مختلفين a و b ،

0.5

بين أن القانون * غير تجميعي.

الجزء الثاني: نذكر أن $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$ حلقة غير تبادلية و واحدة وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

و أن $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و أن $(\mathbb{F}^*, ')$ زمرة تبادلية.

$$F = \{M(x, y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \quad \text{و ليكن} \quad M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

1- بين أن F فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي الحقيقي $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$

0.5

2- بين أن F جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{C}), ')$

0.5

3- نعتبر التطبيق j من \mathbb{F}^* نحو F الذي يربط كل عدد عقدي $x + iy$ (حيث x و y عدنان حقيقيان)

بالمصفوفة $M(x, y)$

أ) بين أن j تشاكل من $(\mathbb{F}^*, ')$ نحو $(F, ')$

0.5

ب) نضع: $F^* = F - \{M(0, 0)\}$. بين أن: $j(\mathbb{F}^*) = F^*$

0.25

ج) بين أن $(F^*, ')$ زمرة تبادلية.

0.25

4- بين أن $(F, +, ')$ جسم تبادلي.

0.75

التمرين الثاني: (3 نقط)

I-1- ليكن a من \mathbb{C} . بين أنه إذا كان a و 13 أوليان فيما بينهما فإن: $a^{2016} \equiv 1 [13]$

0.5

2- نعتبر في \mathbb{Z} المعادلة: $x^{2015} \equiv 2 [13]$ (E) وليكن x حلا للمعادلة (E)

أ) بين أن x و 13 أوليان فيما بينهما.

0.5

ب) بين أن: $x \equiv 7 [13]$

0.5

3- بين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي: $S = \{7 + 13k / k \in \mathbb{Z}\}$

0.5

II- نعتبر صندوقا U يحتوي على خمسين (50) كرة مرقمة من 1 إلى 50. (الكرات لا يمكن التمييز بينها باللمس)

1- نسحب عشوائيا كرة من الصندوق. ما هو احتمال الحصول على كرة تحمل رقما يكون حلا للمعادلة (E) ؟

0.5

2- نسحب عشوائيا كرة من الصندوق ، نسجل رقمها ثم نعيدها إلى الصندوق. نكرر هذه التجربة ثلاث مرات.

0.5

ما هو احتمال الحصول مرتين بالضبط على كرة تحمل رقما يكون حلا للمعادلة (E) ؟

التمرين الثالث: (3 نقط)

نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة التالية: $(E) : z^2 - (1+i)z + 2 + 2i = 0$

1-أ) تحقق أن $(1-3i)^2$ هو مميز المعادلة (E) 0.25

ب) حدد z_1 و z_2 حلتي المعادلة (E) في المجموعة \mathbb{C} (نأخذ z_1 تخيلي صرف) 0.5

ج) بين أن: $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ 0.5

2- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و مباشر .
نعتبر النقطة A التي لحقها z_1 و B النقطة التي لحقها z_2

أ) حدد العدد العقدي e لحق النقطة E منتصف القطعة [AB] 0.25

ب) ليكن r الدوران الذي مركزه A وقياس زاويته $\frac{2\pi}{3}$ 0.5

وليكن c لحق النقطة C صورة النقطة E بالدوران r . بين أن: $c = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$

ج) نعتبر D النقطة ذات اللق $d = 1 + \frac{3}{2}i$.

بين أن العدد $\frac{z_2 - d}{z_2 - z_1} \frac{z_1 - c}{z_1 - d}$ حقيقي ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها.

التمرين الرابع: (6 نقط)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم.

نعتبر الدالة العددية f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على \mathbb{R} بما يلي: $f_n(x) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}$

و ليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في معلم متعامد و ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1-أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ ثم أول مبيانيا النتيجتين المحصل عليهما. 0.75

ب) بين أن الدالة f_n قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ثم أحسب $f_n'(x)$ لكل x من \mathbb{R} 0.75

ج) بين أن الدالة f_n تزايدية قطعا على \mathbb{R} 0.25

2-أ) بين أن النقطة $I_n \in \mathbb{C}, \frac{1}{2}$ مركز تماثل للمنحنى (C_n) 0.5

ب) أنشئ المنحنى (C_1) . 0.5

- (ج) أحسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C_1) و المستقيمت: $x=0$ و $x=1$ و $y=0$ 0.75
- 3- (أ) لكل n من \mathbb{N}^* ، بين أن المعادلة: $f_n(x) = x$ تقبل حلا وحيدا u_n في المجال $]0, n[$ 0.75
- (ب) بين أن: $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ (x ، x) (\mathbb{N}^* x) 0.5
- (ج) بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة. 0.75
- (د) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ 0.5

التمرين الخامس: (4 نقط)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على \mathbb{R}^* ، بما يلي: $g(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$

- 1- بين أن الدالة g زوجية. 0.5
- 2- بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ثم أحسب $g'(x)$ من أجل $x > 0$ 0.75
- 3- (أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء، تحقق أن: $\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt = \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$ ($x > 0$) 0.5
- (ب) بين أنه لكل x من المجال $]0, +\infty[$ لدينا: $|g(x)| \leq \frac{2}{x}$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ 0.75
- 4- (أ) بين أن: $\int_x^{3x} \frac{1 - \cos t}{t} dt \leq 2x$ ($x > 0$) (لاحظ أن: $1 - \cos t \leq t$) ($t > 0$) 0.5
- (ب) تحقق أن: $g(x) - \ln 3 = \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt$ ($x > 0$) 0.5
- (ج) استنتج: $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ 0.5

انتهى