المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵣⵣⴰⵍⴰⵏ

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2015
- الموضوع -

NS 24

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل	9

- مدة إنجاز الموضوع هي أ ربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالأعداد العقدية.......................(3 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات...........................(3 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالبنيات الجبرية.....................(4 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل..............................(6.5 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل ....(3.5 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (3 نقط)

1- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $(E):\ z^2-(5+i\sqrt{3})z+4+4i\sqrt{3}=0$

0.25 أ) تحقق أن $(3-i\sqrt{3})^2$ هو مميز المعادلة (E)

0.5 ب) حدد a و b حلي المعادلة (E) (علما أن: $b\in\mathbb{R}$)

0.25 ج) تحقق أن: $b=(1-i\sqrt{3})a$

2- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و مباشر.
لتكن A النقطة التي لحقها a و B النقطة التي لحقها b

0.5 أ) حدد العدد العقدي b_1 لحق النقطة B_1 صورة النقطة O بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$

0.5 ب) بين أن B هي صورة B_1 بالتحاكي الذي مركزه A و نسبته $\sqrt{3}$

0.5 ج) تحقق أن: $\arg\left(\frac{b}{b-a}\right)\equiv\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

0.5 د) لتكن C نقطة، لحقها c، تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OAB وتخالف O و A
حدد عمدة للعدد العقدي $\frac{c}{c-a}$

التمرين الثاني: (3 نقط)

ليكن x عددا صحيحا نسبيا بحيث: $x^{1439}\equiv 1436\ [2015]$

0.25 1- علما أن: $1436\times1051-2015\times749=1$ ، بين أن 1436 و 2015 أوليان فيما بينهما.

2- ليكن d قاسما مشتركا للعددين x و 2015

0.5 أ) بين أن d يقسم 1436

0.5 ب) استنتج أن x و 2015 أوليان فيما بينهما.

0.75 3- أ) باستعمال مبرهنة فيرما بين أن: $x^{1440}\equiv1\ [5]$ و $x^{1440}\equiv1\ [13]$ و $x^{1440}\equiv1\ [31]$

(لاحظ أن: $2015=5.13.31$)

0.5 ب) بين أن: $x^{1440}\equiv1\ [65]$ ثم استنتج أن: $x^{1440}\equiv1\ [2015]$

0.5 4- بين أن: $x\equiv1051\ [2015]$

التمرين الثالث:(4 نقط)

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و أن $(\mathbb{R},+)$ زمرة تبادلية.

لكل عدد حقيقي x نضع: $M(x)=\begin{pmatrix}1-x&x\\-2x&1+2x\end{pmatrix}$ و نعتبر المجموعة $E=\{M(x)/x\in\mathbb{R}\}$

نزود E بقانون التركيب الداخلي $\top$ المعرف بما يلي: $(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2)\quad M(x)\top M(y)=M(x+y+1)$

1- ليكن φ التطبيق من $\mathbb{R}$ نحو E المعرف بما يلي: $(\forall x\in\mathbb{R})\quad \varphi(x)=M(x-1)$

أ) بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(E,\top)$ — 0.5

ب) بين أن $(E,\top)$ زمرة تبادلية. — 0.5

2- أ) بين أن: $(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2)\quad M(x)\times M(y)=M(x+y+xy)$ — 0.5

ب) استنتج أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ و أن القانون "$\times$" تبادلي في E — 0.5

ج) بين أن القانون "$\times$" توزيعي بالنسبة للقانون "$\top$" في E. — 0.5

د) تحقق أن $M(-1)$ هو العنصر المحايد في $(E,\top)$ و أن I هو العنصر المحايد في $(E,\times)$. — 0.5

3- أ) تحقق أن: $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\})\quad M(x)\times M\left(\dfrac{-x}{1+x}\right)=I$ — 0.25

ب) بين أن $(E,\top,\times)$ جسم تبادلي. — 0.75

التمرين الرابع: (6.5 نقط)

الجزء الأول: لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$f(0)=0 \quad \text{و} \quad f(x)=x\left(1+ln^2 x\right) \quad \text{إذا كان} \quad x>0$$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. — 0.5

2- أ) بين أن الدالة f متصلة على اليمين في 0 — 0.25

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. — 0.5

ج) أحسب $f'(x)$ من أجل $x>0$ ثم استنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$ — 0.5

3- أ) بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف I أفصولها e^{-1}. — 0.25

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة للمستقيم الذي معادلته : $y=x$ — 0.25

ج) أنشئ المنحنى (C) . (نأخذ: $e^{-1}=0.4$) — 0.5

الجزء الثاني: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي: $u_0=e^{-1}$ و $u_{n+1}=f(u_n)\quad (\forall n\in\mathbb{N})$

1- بين بالترجع أن: $e^{-1}\leq u_n<1\quad (\forall n\in\mathbb{N})$ — 0.5

2- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة. — 0.5

3- نضع: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$

أ) بين أن: $e^{-1}\leq l\leq 1$ — 0.25

ب) حدد قيمة l — 0.5

الجزء الثالث: لتكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي: $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$

1- أ) بين أن الدالة: $H: x \mapsto -\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x^2\ln x$ دالة أصلية للدالة: $h: x \mapsto x\ln x$ على المجال $]0,+\infty[$	0.25
ب) بين أن: $\int_1^x t\ln^2(t)dt=\frac{x^2}{2}\ln^2(x)-\int_1^x t\ln(t)dt$ $\quad(\forall x>0)$	0.5
ج) استنتج أن: $F(x)=-\frac{3}{4}+\frac{3x^2}{4}-\frac{x^2}{2}\ln(x)+\frac{x^2}{2}\ln^2(x)$ $\quad(\forall x>0)$	0,5
2- أ) بين أن الدالة F متصلة على المجال $[0,+\infty[$	0.25
ب) أحسب $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ ثم استنتج قيمة التكامل $\int_0^1 f(x)dx$	0.5

التمرين الخامس:(3.5 نقط)

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي: $g(0)=\ln 2$ و $g(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt$ إذا كان $x>0$

1- أ) بين أن : $e^{-2x}\le e^{-t}\le e^{-x}$ $\quad(\forall x>0)\ (\forall t\in[x,2x])$	0.5
ب) بين أن: $e^{-2x}\ln 2\le g(x)\le e^{-x}\ln 2$ $\quad(\forall x>0)$	0.5
ج) استنتج أن الدالة g متصلة على اليمين في 0 .	0.25
2- بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ثم أحسب $g'(x)$ من أجل $x>0$	0.75
3- أ) بين أن : $-1\le\frac{e^{-t}-1}{t}\le -e^{-t}$ $\quad(\forall t>0)$ (يمكنك استعمال مبرهنة التزايدات المنتهية)	0.5
ب) بين أن : $-1\le\frac{g(x)-\ln 2}{x}\le\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$ $\quad(\forall x>0)$	0.5
ج) استنتج أن الدالة g قابلة للاشتقاق على اليمين في 0.	0.5

انتهى

السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	تصحيح الامتحان الوطني 2015 الدورة العادية	امتحانات وطنية

تمرين 1 :

$$(E):\ z^2-\left(5+i\sqrt{3}\right)z+4+4i\sqrt{3}=0$$

1

أ) $\Delta=\left(5+i\sqrt{3}\right)^2-4\left(4+4i\sqrt{3}\right)=25+10i\sqrt{3}-3-16-16i\sqrt{3}=6-6i\sqrt{3}=9-6i\sqrt{3}-3=\left(3-i\sqrt{3}\right)^2$

ب) $a=\dfrac{5+i\sqrt{3}-3+i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$ ، $b=\dfrac{5+i\sqrt{3}+3-i\sqrt{3}}{2}=4$

ج) لدينا : $a\left(1-i\sqrt{3}\right)=\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)=1+3=4=b$ إذن : $b=\left(1-i\sqrt{3}\right)a$

2

أ) الصيغة العقدية للدوران $R\left(A,\dfrac{\pi}{2}\right)$ هي : $z'=e^{\frac{\pi}{2}i}(z-a)+a=i(z-a)+a$ ، بما أن $B_1=R(O)$ فإن :

$b_1=i(0-a)+a=-i\,a+a=-i\left(1+i\sqrt{3}\right)+1+i\sqrt{3}=-i-\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}=1-\sqrt{3}+i\left(\sqrt{3}-1\right)$

ب) الصيغة العقدية للتحاكي h هي : $z'=k(z-a)+a=\sqrt{3}(z-a)+a$

لتكن $B_1'=R(B_1)$ إذن : $b_1'=\sqrt{3}(b_1-a)+a=\sqrt{3}(-i\,a)+a=a\left(1-i\sqrt{3}\right)=b$

إذن $B_1'=B$ منه : $B=R(B_1)$

ج) لدينا : $\dfrac{b}{b-a}=\dfrac{b}{a-i\sqrt{3}a-a}=\dfrac{b}{-a\sqrt{3}i}=\dfrac{\frac{b}{a}}{-\sqrt{3}i}=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}i}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\dfrac{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{-i}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\dfrac{e^{\frac{-\pi}{3}i}}{e^{-\frac{\pi}{2}i}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{\pi}{6}i}$

بالتالي : $\arg\left(\dfrac{b}{b-a}\right)\equiv\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$

د) بما أن C تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OAB فإن النقط O و A و B و C متداورة

منه : $\dfrac{c-0}{c-a}\div\dfrac{b-0}{b-a}\in IR$ منه : $\arg\left(\dfrac{c-0}{c-a}\div\dfrac{b-0}{b-a}\right)\equiv0[\pi]$ منه : $\arg\left(\dfrac{c}{c-a}\right)-\arg\left(\dfrac{b}{b-a}\right)\equiv0[\pi]$

منه : $\arg\left(\dfrac{c}{c-a}\right)\equiv\dfrac{\pi}{6}[\pi]$

تمرين 2 : $x^{1439}\equiv1436[2015]$

1 بما أن : $1436\times1051-2015\times749=1$ فحسب مبرهنة بيزو «Bezout» فإن : $1436\wedge2015=1$

2

أ) لدينا : $x^{1439}\equiv1436[2015]$ إذن : $\exists k\in Z\ /\quad x^{1439}-2015k=1436$

لدينا d/x و $d/2015$ منه: d/x^{1436} و $d/2015k$ منه : $d/x^{1439}-2015k$ بالتالي : $d/1436$

ب) نضع : $x\wedge2015=d$ ، إذن d/x و $d/2015$ إذن حسب السؤال السابق : $d/1436$

إذن : $d/1436\times1051$ و لدينا : $d/2015$ إذن : $d/2015\times749$ إذن : $d/1436\times1051-2015\times749$

منه : $d/1$ ، و بما أن : $d>0$ فإن : $d=1$ ، بالتالي : $x\wedge2015=1$

3

أ) لدينا : $2015=5\times13\times31$ ، بما أن : $x\wedge2015=1$ فإن : $x\wedge(5\times13\times31)=1$ إذن : $\begin{cases}x\wedge5=1\\x\wedge13=1\\x\wedge31=1\end{cases}$

إذن حسب مبرهنة فيرما نستنتج أن : $\begin{cases}x^4\equiv1[5]\\x^{12}\equiv1[13]\\x^{30}\equiv1[31]\end{cases}$ منه : $\begin{cases}\left(x^4\right)^{360}\equiv1[5]\\\left(x^{12}\right)^{120}\equiv1[13]\\\left(x^{30}\right)^{48}\equiv1[31]\end{cases}$ بالتالي : $\begin{cases}x^{1404}\equiv1[5]\\x^{1404}\equiv1[13]\\x^{1404}\equiv1[31]\end{cases}$

ب)

لدينا : $\begin{cases} x^{1404}\equiv 1[5] \\ x^{1404}\equiv 1[13]\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}5/x^{1404}-1\\ 13/x^{1404}-1\end{cases}$ منه : $(5\vee 13)/x^{1404}-1$ أي : $65/x^{1404}-1$ أي : $x^{1404}\equiv 1[65]$

مرة أخرى لدينا : $\begin{cases} x^{1404}\equiv 1[65] \\ x^{1404}\equiv 1[31]\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}65/x^{1404}-1\\ 31/x^{1404}-1\end{cases}$ منه : $(65\vee 31)/x^{1404}-1$ أي : $2015/x^{1404}-1$

أي : $x^{1404}\equiv 1[2015]$

4

لدينا : $x^{1439}\equiv 1436[2015]$ منه : $x^{1440}\equiv 1436\,x[2015]$ و لدينا : $x^{1404}\equiv 1[2015]$

إذن : $1436\,x\equiv 1[2015]$ منه : $\exists \lambda\in Z\ /\quad 1436\,x-2015\lambda=1$

منه : $1436\,x-2015\lambda=1436\times 1051-2015\times 749$ منه : $1436(x-1051)=2015(\lambda-749)$

منه : $2015/1436(x-1051)$ ، و بما أن : $2015\wedge 1436=1$ فإن $2015/(x-1051)$ أي : $x\equiv 1051[2015]$

تمرين 3 :

$M(x)=\begin{pmatrix}1-x & x\\ -2x & 1+2x\end{pmatrix}$ ، $E=\{M(x)\ /\ x\in IR\}$ ، $\forall (x,y)\in IR^2\quad M(x)\mathrm{T}M(y)=M(x+y+1)$

$$\begin{aligned}\varphi:\ & IR\to E\\ & x\mapsto \varphi(x)=M(x-1)\end{aligned}$$

1

أ) لدينا : $\forall (x,y)\in IR^2\quad \varphi(x+y)=M(x+y-1)$

و $\forall (x,y)\in IR^2\quad \varphi(x)\mathrm{T}\varphi(y)=M(x-1)\mathrm{T}M(y-1)=M(x-1+y-1+1)=M(x+y-1)$

إذن : $\forall (x,y)\in IR^2\quad \varphi(x+y)=\varphi(x)\mathrm{T}\varphi(y)$ ، إذن : φ تشاكل من $(IR,+)$ نحو (E,T)

ب) لدينا $\forall x\in IR\quad \varphi(x+1)=M(x)$ إذن $\forall M\in E\ \exists m\in IR\ /\ \varphi(m)=M$ أي أن φ شمول أي : $\varphi(IR)=E$

إذن و بما أن : $(IR\,,+)$ زمرة تبادلية فإن $(E\,,\mathrm{T})$ زمرة تبادلية عنصرها الحايد هو: $\varphi(0)=M(-1)$

2

أ) لدينا لكل $(x,y)\in IR^2$:

$$M(x)\times M(y)=\begin{pmatrix}1-x & x\\ -2x & 1+2x\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1-y & y\\ -2y & 1+2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-x)(1-y)-2xy & y(1-x)+x(1+2y)\\ -2x(1-y)-2y(1+2x) & -2xy+(1+2x)(1+2y)\end{pmatrix}$$

$$M(x)\times M(y)=\begin{pmatrix}1-x-y+xy-2xy & y-xy+x+2xy\\ -2x+2xy-2y-4xy & -2xy+1+2y+2x+4xy\end{pmatrix}$$

$$M(x)\times M(y)=\begin{pmatrix}1-x-y-xy & y+x+xy\\ -2x-2y-2xy & 1+2y+2x+2xy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-(x+y+xy) & y+x+xy\\ -2(x+y+xy) & 1+2(x+y+xy)\end{pmatrix}$$

$$M(x)\times M(y)=M(x+y+xy)$$

ب) بما أن : $(x,y)\in IR^2\ \Rightarrow x+y+xy\in IR$

فإن : $(M(x),M(y))\in E^2\ \Rightarrow M(x+y+xy)\in E\Rightarrow M(x)\times M(y)\in E$

إذن E جزء مستقر من $(M_2(IR),\times)$ ، ولدينا أيضا :

$\forall (x,y)\in IR^2\quad M(x)\times M(y)=M(x+y+xy)=M(y+x+yx)=M(y)\times M(x)$

أي أن القانون $\times$ تبادلي

ج) لدينا : لكل $(x,y,z)\in IR^3$:

$M(x)\times(M(y)\mathrm{T}M(z))=M(x)\times M(y+z+1)=M(x+y+z+1+x(y+z+1))$

$M(x)\times(M(y)\mathrm{T}M(z))=M(2x+y+z+xy+xz+1)$

و $(M(x)\times M(y))\mathrm{T}(M(x)\mathrm{T}M(z))=M(x+y+xy)\mathrm{T}M(x+z+xz)=M(x+y+xy+x+z+xz+1)$

$(M(x)\times M(y))\mathrm{T}(M(x)\mathrm{T}M(z))=M(2x+y+z+xy+xz+1)$

منه : $M(x)\times(M(y)\mathrm{T}M(z))=(M(x)\times M(y))\mathrm{T}(M(x)\mathrm{T}M(z))$

و لكون القانونين $\times$ و T تبادليان فإن : $(M(y)\mathrm{T}M(z))\times M(x)=(M(y)\times M(x))\mathrm{T}(M(z)\mathrm{T}M(x))$

إذن : $\times$ توزيعي بالنسبة لـ T في E

د) لدينا : $\forall x\in IR\quad M(x)\mathrm{T}M(-1)=M(-1)\mathrm{T}M(x)=M(x-1+1)=M(x)$

		إذن $M(-1)$ هي العنصر المحايد في (E,T) و لدينا: $M(0)=I$ ، و $M(x)\times M(0)=M(0)\times M(x)=M(x+0+0)=M(x) \quad \forall x\in IR$ إذن : I هي العنصر المحايد في $(E,\times)$
3	أ)	لدينا : $M(x)\times M\left(\frac{-x}{1+x}\right)=M\left(x-\frac{x}{1+x}-\frac{x^2}{1+x}\right)=M\left(\frac{x+x^2-x-x^2}{1+x}\right)=M(0)=I \quad (\forall x\in IR-\{-1\})$
	ب)	لدينا : (E,T) زمرة تبادلية عنصرها المحايد : $M(-1)$ القانون $\times$ قانون تركيب داخلي تبادلي في E و تجميعي لأن $E\subset M_2(IR)$ و $(M_2(IR),\times)$ تجميعي القانون $\times$ توزيعي بالنسبة لـ T في E و له عنصر محايد هو : $I=M(0)$ إذن : $(E,T,\times)$ حلقة واحدية، و بما أن لكل $M(x)\in E-\{M(-1)\}$ مماثلا بالنسبة للقانون $\times$ هو $M\left(\frac{-x}{1+x}\right)$ فإن $(E,T,\times)$ جسم تبادلي

التمرين الرابع :

الجزء الأول:		$\begin{cases} f(x)=x(1+\ln^2 x); & x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$
1		لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x(1+\ln^2 x)=+\infty$ (لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\ln^2 x)=+\infty$) و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\ln^2 x)=+\infty$ ما يعني أن (C) يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الأراتيب جوار $+\infty$
2	أ)	لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x+x\ln^2 x=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x+(\sqrt{x}\ln x)^2=0+0^2=0=f(0)$ إذن f متصلة يمين الصفر
		للتذكير : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^r\ \ln(x)=0$ حيث $r\in Q^{*+}$ (في حالتنا : $r=\frac{1}{2}$)
	ب)	لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} 1+\ln^2 x=+\infty$ (لأن : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln x=-\infty$) إذن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$ ، ما يعني أن الدالة غير قابلة للاشتقاق يمين الصفر، لكن المنحنى (C) يقبل نصف مماس عمودي في النقطة O له نفس منحى المتجهة $\vec{j}$
		ليس من الضروري تحديد منحى نصف المماس، لكنه يساعد على اكتشاف أي خطأ في جدول التغيرات لاحقا المنحنى نعرفه انطلاقا من إشارة النتيجة و يمين أو يسار النهاية(في حالتنا $(+)\times(+)\to+$ $\begin{cases}+\infty\\0^+\end{cases}$ أي الأعلى أي منحى $\vec{j}$
	ج)	لدينا : $\forall x>0 \quad f'(x)=1+\ln^2 x+x\left(2\ln x\times\frac{1}{x}\right)=1+\ln^2 x+2\ln x=(\ln x+1)^2$ لدينا : $(\ln x+1)^2\geq0 \quad \forall x>0$ ، و $(\ln x+1)^2=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$ إذن $f'(x)$ موجبة على $]0;+\infty[$ و تنعدم في عدد وحيد، إذن f تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$
		الرتابة القطعية تستوجب أحد حالتين: ▪ أن تكون المشتقة لها إشارة سالبة قطعا أو موجبة قطعا على كل المجال ▪ أن تكون موجبة أو سالبة و أن تنعدم في عدد معدود من الحلول (حل، حلان،...)

أ) لدينا لكل $x \in]0;+\infty[$: $f''(x) = 2(\ln x + 1) \times \frac{1}{x} = \frac{2}{x}(\ln x + 1)$

ولدينا : $x = e^{-1} \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0$ و $x > e^{-1} \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0$

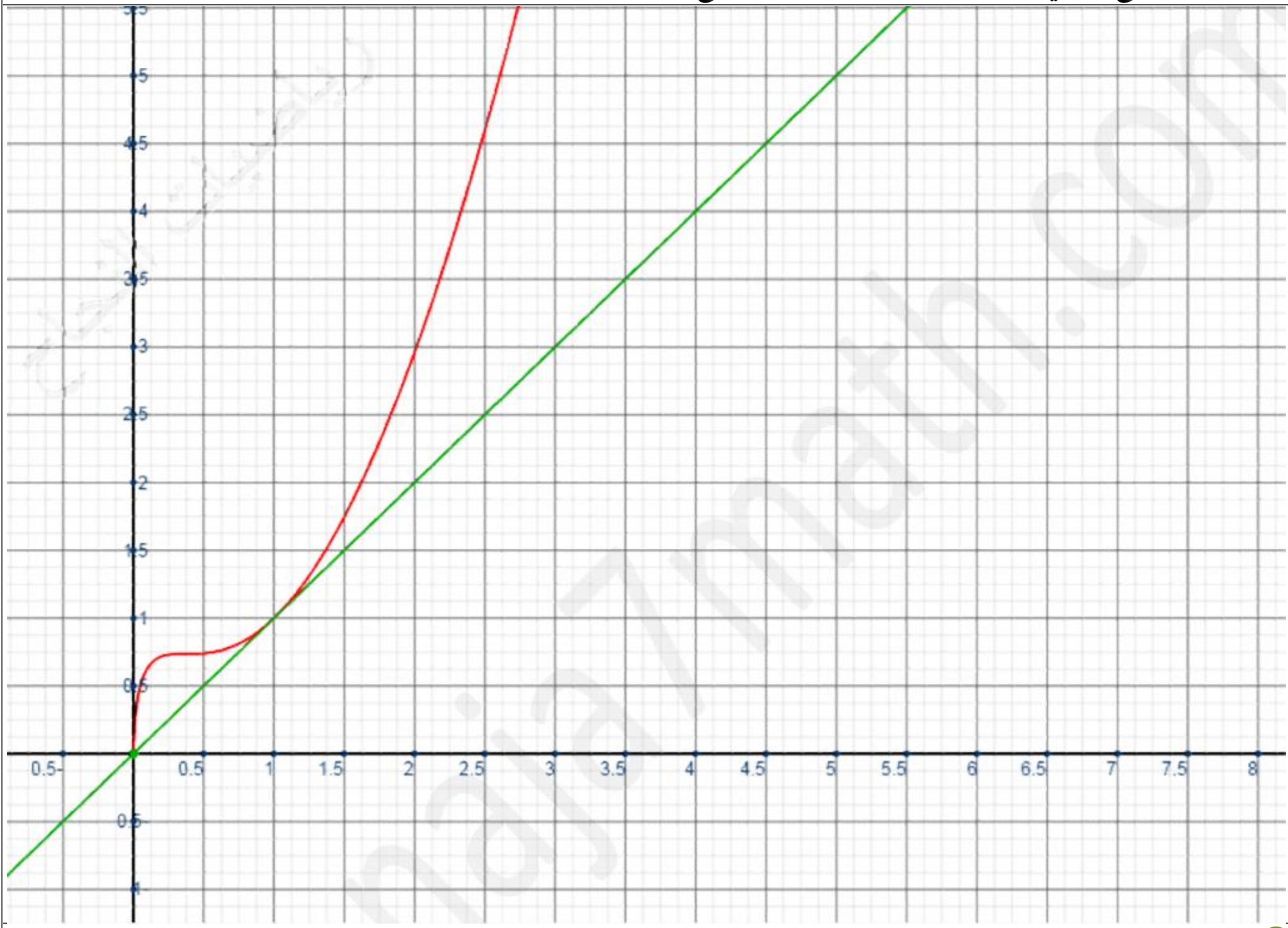
إذن : $f''(x)$ تنعدم و تغير إشارتها في e^{-1} إذن فالمنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف I أفصولها e^{-1}

ب) لدينا لكل $x \in]0;+\infty[$: : $f(x) - x = x\ln^2 x \geq 0$ و $f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

إذن (C) يوجد فوق المستقيم $(D):\ y = x$ و يقطعه في النقطة $A(1;1)$

دراسة الوضع النسبي تستوجب أيضا دراسة نقط التقاطع

ج)



الشكل تم إنشاؤه باستعمال برنامج الموقع : Super Graph

الجزء الثاني:
$$\begin{cases} u_0 = e^{-1} \\ u_{n+1} = f(u_n)\ ;\ n \in IN \end{cases}$$

1 نعلم أن : $e > 1$ إذن : $\frac{1}{e} \leq \frac{1}{e} < 1$ أي : $\frac{1}{e} \leq u_0 < 1$

نفترض أن : $\frac{1}{e} \leq u_n < 1$، إذن : $f\left(\frac{1}{e}\right) \leq f(u_n) < f(1)$ (لأن f تزايدية على $]0;+\infty[$)

منه : $\frac{2}{e} \leq u_{n+1} < 1$ منه : $\frac{1}{e} \leq u_{n+1} < 1$ (لأن : $\frac{1}{e} < \frac{2}{e}$)، إذن حسب مبدأ الترجع: $\frac{1}{e} \leq u_n < 1 \quad \forall n \in IN$

2 لدينا : $u_{n+1} - u_n = u_n \ln^2(u_n) \quad \forall n \in IN$

و لدينا : $\forall n \in IN \quad \frac{1}{e} \leq u_n < 1 \Rightarrow \forall n \in IN \quad \begin{cases} \ln(u_n) < 0 \\ u_n > 0 \end{cases} \Rightarrow \forall n \in IN \quad u_n \ln^2(u_n) > 0$

إذن : $(u_n)_n$ متتالية تزايدية قطعا، وبما أنها مكبورة بالعدد 1 فهي متقاربة.

يمكن أيضا استعمال السؤال 3) ب) من الجزء الأول

3	أ)	لدينا : $\frac{1}{e} \le u_n < 1$ $\forall n \in IN$ و $\lim_{n\to+\infty} 1 = 1$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ و $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$ ، إذن : $\frac{1}{e} \le l \le 1$	
	ب)	لدينا: الدالة f متصلة على $\left[\frac{1}{e};1\right]$ و $f\left(\left[\frac{1}{e};1\right]\right) = \left[\frac{2}{e};1\right] \subset \left[\frac{1}{e};1\right]$ و المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة نهايتها l إذن l تحقق المعادلة $f(x) = x$ و التي حسب الجزء الأول تقبل حلين بالظبط 1 و 0 ولكون : $\frac{1}{e} \le l \le 1$ ، فإن : $l = 1$	

الجزء الثالث: $F(x) = \int_1^x f(t)dt \qquad \forall x \in [0;+\infty[$

1	أ)	لدينا لكل $x \in]0;+\infty[$: $H'(x) = \left(\frac{-1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x\right)' = \frac{-2}{4}x + \frac{1}{2}\left(2x\ln x + x^2 \times \frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{2}x + x\ln x + \frac{1}{2}x = x\ln x = h(x)$ إذن الدالة H هي دالة أصلية للدالة h
	ب)	لدينا لكل $x \in]0;+\infty[$: $\int_1^x t\ln^2(t)dt = \int_1^x \left(\frac{1}{2}t^2\right)' \ln^2(t)dt = \left[\frac{1}{2}t^2 \ln^2(t)\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{2}t^2\, 2\ln(t) \times \frac{1}{t}dt = \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \int_1^x t\,\ln(t)dt$
	ج)	لدينا لكل $x \in]0;+\infty[$: $F(x) = \int_1^x t\left(1+\ln^2(t)\right)dt = \int_1^x t + t\,\ln^2(t)dt = \int_1^x t\;dt + \int_1^x t\,\ln^2(t)dt$ $F(x) = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^x + \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \left[\frac{-1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t^2\ln t\right]_1^x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \left(\frac{-x^2}{4} + \frac{x^2}{2}\ln x\right) + \left(\frac{-1}{4}\right)$ $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}\ln^2(x) + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4} = \frac{-3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{2}\ln^2(x)$
2	أ)	نعلم أن الدالة f متصلة على $[0;+\infty[$ ، إذن فهي تقبل دالة أصلية k متصلة و قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$ ، ومنه : $F(x) = k(x) - k(1)$ $\forall[0;+\infty[$ ، ما يعني أن الدالة F متصلة على $[0;+\infty[$
	ب)	$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} F(x) = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{-3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{2}\ln^2(x) = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{-3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{(x\ln x)^2}{2}$ $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} F(x) == \frac{-3}{4} + 0 - 0 + 0 = \frac{-3}{4}$ بما أن F متصلة يمين الصفر حسب السؤال السابق فإن : $\int_0^1 f(t)dt = -\int_1^0 f(t)dt = -F(0) = -\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} F(x) = \frac{3}{4}$

التمرين الخامس :

$$\begin{cases} g(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}dt \quad ; \; x > 0 \\ g(0) = \ln 2 \end{cases}$$

1	أ)	ليكن $x > 0$ ، لدينا : $e^{-2x} \le e^{-t} \le e^{-x} \Leftarrow -2x \le -t \le -x \Leftarrow x \le t \le 2x \Leftarrow t \in [x, 2x]$ إذن : $e^{-2x} \le e^{-t} \le e^{-x} \quad (\forall t \in [x,2x]) \quad (\forall x > 0)$
	ب)	حسب السؤال السابق نستنتج أن : $\frac{e^{-2x}}{t} \le \frac{e^{-t}}{t} \le \frac{e^{-x}}{t} \quad (\forall t \in [x,2x]) \quad (\forall x > 0)$ منه : $\int_x^{2x} \frac{e^{-2x}}{t}dt \le \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}dt \le \int_x^{2x} \frac{e^{-x}}{t}dt \quad (\forall x > 0)$

		منه: $(\forall x>0)\quad e^{-2x}\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt\le g(x)\le e^{-x}\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt$ أي : $(\forall x>0)\quad e^{-2x}[\ln t]_x^{2x}\le g(x)\le e^{-x}[\ln t]_x^{2x}$ منه : $(\forall x>0)\quad e^{-2x}(\ln 2x-\ln x)\le g(x)\le e^{-x}(\ln 2x-\ln x)$ بالتالي : $(\forall x>0)\quad e^{-2x}\ln 2\le g(x)\le e^{-x}\ln 2$
	ج)	بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} e^{-x}\ln 2=\ln 2$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} e^{-2x}\ln 2=\ln 2$ فإن : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x)=\ln 2=g(0)$ ، إذن g متصلة يمين 0
2		بما أن الدالة $t\mapsto\frac{e^{-t}}{t}$ متصلة على $]0;+\infty[$ فهي تقبل دالة أصلية G متصلة و قابلة للاشتقاق على هذا المجال، ولدينا ، لكل $x>0$: $g(x)=G(2x)-G(x)$ ، وبما أن $x\mapsto 2x$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ فإن الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا : $\forall x>0\quad g'(x)=2G'(2x)-G'(x)=2\frac{e^{-2x}}{2x}-\frac{e^{-x}}{x}=\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$
3	أ)	ليكن $t>0$ ، الدالة $p:x\mapsto e^{-x}$ متصلة على $[0,t]$ و قابلة للاشتقاق على $]0,t[$ (لأنها متصلة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$)، إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية : $\exists c_t\in]0,t[\quad \frac{p(t)-p(0)}{t}=p'(c_t)$ ولدينا : $\forall x>0\ \ p'(x)=-e^{-x}$ ، منه : $\exists c_t\in]0,t[\quad \frac{e^{-t}-1}{t}=-e^{-c_t}$ ولدينا : $c_t\in]0,t[\ \Rightarrow\ 0<c_t<t\ \Rightarrow\ -t<-c_t<0\ \Rightarrow\ e^{-t}<e^{-c_t}<1\ \Rightarrow\ -1<-e^{-c_t}<-e^{-t}$ منه : $-1<\frac{e^{-t}-1}{t}<-e^{-t}$ بالتالي : $\forall t>0\quad -1<\frac{e^{-t}-1}{t}<-e^{-t}$ أو أيضا : $\forall t>0\quad -1\le\frac{e^{-t}-1}{t}\le -e^{-t}$
	ب)	لدينا : $\forall t>0\quad -1\le\frac{e^{-t}-1}{t}\le -e^{-t}$ منه : $\forall x>0\quad \int_x^{2x}-1dt\le\int_x^{2x}\frac{e^{-t}-1}{t}dt\le\int_x^{2x}-e^{-t}dt$ منه : $\forall x>0\quad [-t]_x^{2x}\le\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt-\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt\le[e^{-t}]_x^{2x}$ منه : $\forall x>0\quad -2x+x\le g(x)-\ln 2\le e^{-2x}-e^{-x}$ بالتالي : $\forall x>0\quad -1\le\frac{g(x)-\ln 2}{x}\le\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$
	ج)	بما أن : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{e^{-2x}-1}{x}-\frac{e^{-x}-1}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}-2\frac{e^{-2x}-1}{-2x}+\frac{e^{-x}-1}{-x}=-2\times1+1=-1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}-1=-1$ ، فإن : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{g(x)-\ln 2}{x}=-1$ أي : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{g(x)-g(0)}{x}=-1$ ، ما يعني أن g قابلة للاشتقاق يمين الصفر.