★★

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2017
- الموضوع -

RS 22

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵥⵓⵕⴰⵏ
ⴷ ⵓⵙⵙⵍⵎⴷ ⴰⵏⴰⴼⵍⵍⴰ ⴷ ⵓⵔⵣⵣⵓ ⴰⵎⴰⵙⵙⴰⵏ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها	المعامل	7

تعليمات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة .

مكونات الموضوع

- يتكون الموضوع من أربعة تمارين و مسألة، مستقلة فيما بينها، وتتوزع حسب المجالات كما يلي :

التمرين الأول	الهندسة الفضائية	3 نقط
التمرين الثاني	حساب الاحتمالات	3 نقط
التمرين الثالث	الأعداد العقدية	3 نقط
التمرين الرابع	المتتاليات العددية	2.5 نقط
المسألة	دراسة دالة عددية و حساب التكامل	8.5 نقط

التمرين الأول : (3 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

نعتبر الفلكة (S) التي معادلتها $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$ و المستوى (P) الذي معادلته $y-z=0$

1) أ- بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(1\ ,\ 1\ ,\ 1)$ و شعاعها هو 2 0.5

ب- احسب $d\left(\Omega,(P)\right)$ و استنتج أن المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (C) 0.5

ج- حدد مركز و شعاع الدائرة (C) 0.5

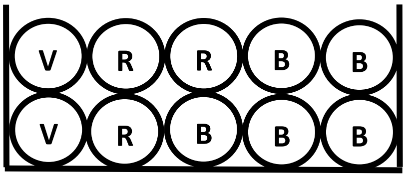
2) ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة $A(1\ ,\ -2\ ,\ 2)$ و العمودي على المستوى (P)

أ- بين أن $\vec{u}(0\ ,1\ ,-1)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ) 0.25

ب- بين أن $\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\right\|=\sqrt{2}\left\|\vec{u}\right\|$ و استنتج أن المستقيم (Δ) يقطع الفلكة (S) في نقطتين. 0.75

ج- حدد مثلوث إحداثيات كل نقطة من نقطتي تقاطع المستقيم (Δ) و الفلكة (S) 0.5

التمرين الثاني : (3 نقط)



يحتوي صندوق على **10** كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس :

خمس كرات بيضاء و ثلاث كرات حمراء و كرتان خضراوان (انظر الشكل جانبه).

نسحب عشوائيا و في آن واحد أربع كرات من الصندوق.

1) نعتبر الحدث A : " من بين الكرات الأربع المسحوبة توجد كرة خضراء واحدة فقط ". 1.5

و الحدث B : " من بين الكرات الأربع المسحوبة توجد بالضبط ثلاث كرات من نفس اللون ".

بين أن $p(A)=\dfrac{8}{15}$ وأن $p(B)=\dfrac{19}{70}$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الخضراء المسحوبة.

أ- بين أن $p(X=2)=\dfrac{2}{15}$ 0.5

ب- حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X و بين أن الأمل الرياضي $E(X)$ يساوي $\dfrac{4}{5}$ 1

التمرين الثالث : (3 نقط)

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية ℂ المعادلة $z^2+4z+8=0$ 0.75

2) نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\ \vec{u}\ ,\vec{v})$، النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي a و b و c بحيث $a=-2+2i$ و $b=4-4i$ و $c=4+8i$

أ- ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه A و زاويته $-\dfrac{\pi}{2}$ 0.5

بين أن $z'=-iz-4$

ب- تحقق من أن النقطة B هي صورة النقطة C بالدوران R و استنتج طبيعة المثلث ABC 0.75

3) ليكن ω لحق النقطة Ω منتصف القطعة $[BC]$

أ- بين أن $|c-\omega|=6$ 0.5

ب- بين أن مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث $|z-\omega|=6$ هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC 0.5

التمرين الرابع : (2.5 نقط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 17$ و $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 12$ لكل n من $I\!N$

1) أ- بين بالترجع أن $u_n > 16$ لكل n من $I\!N$ | 0.5

ب- بين أن المتتالية (u_n) تناقصية و استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة. | 0.5

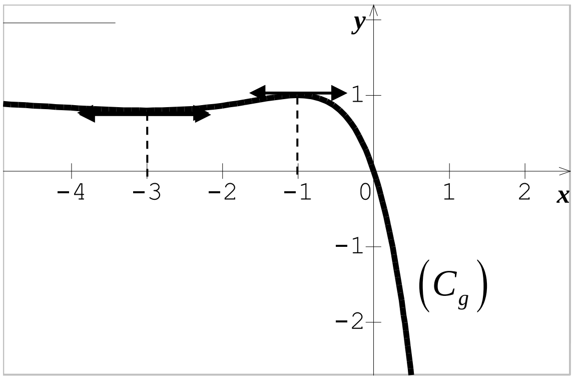
2) لتكن (v_n) المتتالية العددية بحيث $v_n = u_n - 16$ لكل n من $I\!N$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية. | 0.5

ب- استنتج أن $u_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$ لكل n من $I\!N$ ثم حدد نهاية المتتالية (u_n) | 0.5

ج- حدد أصغر قيمة للعدد الصحيح الطبيعي n التي يكون من أجلها $u_n < 16,0001$ | 0.5

المسألة : (8.5 نقط)



I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $I\!R$ بما يلي :

$$g(x) = 1-(x+1)^2 e^x$$

1) تحقق من أن $g(0) = 0$ | 0.25

2) انطلاقا من التمثيل المبياني (C_g) للدالة g (انظر الشكل جانبه) | 1

بين أن $g(x) \geq 0$ لكل x من $]-\infty, 0]$

وأن $g(x) \leq 0$ لكل x من $[0, +\infty[$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $I\!R$ بما يلي : $f(x) = x+1-(x^2+1)e^x$

و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة : $2\ cm$)

1) أ- تحقق من أن $f(x) = x+1-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$ لكل x من $I\!R$ ثم استنتج أن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ | 0.75

ب- احسب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]$ واستنتج أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y = x+1$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ | 0.5

ج- بين أن المنحنى (C_f) يوجد تحت المستقيم (D) | 0.25

2) أ- بين أن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (يمكنك كتابة $f(x)$ على الشكل $x\left[1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]$) | 0.5

ب- بين أن المنحنى (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ ، فرعا شلجميا يتم تحديد اتجاهه. | 0.25

3) أ- بين أن $f'(x) = g(x)$ لكل x من $I\!R$ | 0.75

ب- بين أن الدالة f تزايدية على $]-\infty, 0]$ و تناقصية على $[0, +\infty[$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f على $I\!R$ | 0.75

ج- بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما -3 و -1 | 0.75

4) أنشئ ، في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$، المستقيم (D) و المنحنى (C_f) (نأخذ $f(-3) \approx -2,5$ و $f(-1) \approx -0,75$) | 1

5) أ- تحقق من أن $H: x \mapsto (x-1)e^x$ هي دالة أصلية للدالة $h: x \mapsto xe^x$ على $I\!R$ ثم بين أن $\int_{-1}^{0} xe^x\,dx = \frac{2}{e} - 1$ | 0.5

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن $\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^x\,dx = 3\left(1-\frac{2}{e}\right)$ | 0.75

ج- احسب ، ب cm^2 ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيم (D) و محور الأراتيب و المستقيم الذي معادلته $x = -1$ | 0.5

تصحيح التمرين الأول

1) أ- لدينا :

$$M(x,y,z)\in(S) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+y^2-2y+z^2-2z=1$$
$$\Leftrightarrow x^2-2(1)x+(1)^2+y^2-2(1)y+(1)^2+z^2-2(1)z+(1)^2=1+(1)^2+(1)^2+(1)^2$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$$
$$\Leftrightarrow (x-(1))^2+(y-(1))^2+(z-(1))^2=(2)^2$$

إذن (S) هي الفلكة التي مركزها $\Omega(1,1,1)$ و شعاعها $R=2$

ب-

✓ $$d(\Omega,(P))=\frac{|(1)-(1)|}{\sqrt{(0)^2+(1)^2+(1)^2}}=0$$

✓ بما أن $d(\Omega,(P))<R$ فإن (P)يقطع الفلكة (S)وفق دائرة (C)

ج- بما أن $d(\Omega,(P))=0$ فإن (P)يقطع الفلكة (S)وفق دائرة (C) (الدائرة الكبرى)

و منه مركز الدائرة (C) هو النقطة $\Omega(1,1,1)$ و شعاعها هو 2.

(مركز الدائرة هو المسقط العمودي لمركز الفلكة على المستوى (P) أي في هذه الحالة هو النقطة Ω

و شعاعها $r=\sqrt{R^2-d^2(\Omega,(P))}=\sqrt{2^2-0^2}=2$)

2) أ- لدينا $y-z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (P) إذن $\vec{u}(0,1,-1)$ هي متجهة منظمية للمستوى (P)

و بما أن $(\Delta)\perp(P)$ فإن $\vec{u}(0,1,-1)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ)

ب-

✓ لدينا : $\vec{u}(0,1,-1)$ و $\overrightarrow{\Omega A}(0,-3,1)$

إذن $$\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & 0\\ -3 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=2.\vec{i}$$

و منه $\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\right\|=2$

و لدينا : $\|\vec{u}\|=\sqrt{(0)^2+(1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

و بالتالي : $\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\right\|=\sqrt{2}\|\vec{u}\|$

✓ لدينا : $d\left(\Omega,(\Delta)\right)=\dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}=\sqrt{2}$

إذن بما أن $d\left(\Omega,(\Delta)\right)<R$ فإن المستقيم (Δ) يقطع الفلكة (S) في نقطتين

ج- تمثيل بارمتري للمستقيم (Δ) هو : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=1 \\ y=-2+t \\ z=2-t \end{cases}$

لنحدد مثلوث إحداثيات كل نقطة من نقطتي تقاطع المستقيم (Δ) و الفلكة (S)

$$M(x,y,z)\in(\Delta)\cap(S) \iff \begin{cases} x=1 \\ y=-2+t & (t\in\mathbb{R}) \\ z=2-t \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2^2 \end{cases}$$

بعد التعويض نحصل على المعادلة $t^2-4t+3=0$

لدينا : $\Delta=4$

إذن : $t=3$ أو $t=1$

✸ $t=1$: $\begin{cases} x=1 \\ y=-2+1=-1 \\ z=2-1=1 \end{cases}$

✸ $t=3$: $\begin{cases} x=1 \\ y=-2+3=1 \\ z=2-3=-1 \end{cases}$

تصحيح التمرين الثاني

التجربة " سحب في آن واحد أربع كرات من الصندوق "

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

لدينا : $card\,\Omega = C_{10}^{4} = 210$

(1

✓ A : " من بين الكرات الأربع المسحوبة توجد كرة خضراء واحدة فقط "

$$V\overline{V}\overline{V}\overline{V}$$

لدينا : $cardA = C_2^1 \times C_8^3 = 2\times 56 = 112$

إذن : $p(A) = \dfrac{cardA}{card\,\Omega} = \dfrac{112}{210} = \dfrac{8}{15}$

✓ B : " من بين الكرات الأربع المسحوبة توجد بالضبط ثلاث كرات من نفس اللون "

$BBB\overline{B}$ أو $RRR\overline{R}$

لدينا : $cardB = C_3^3 \times C_7^1 + C_5^3 \times C_5^1 = 1\times 7 + 10\times 5 = 57$

إذن : $p(B) = \dfrac{cardB}{card\,\Omega} = \dfrac{57}{210} = \dfrac{19}{70}$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الخضراء المسحوبة .

أ- $X = 2 \rightarrow VV\overline{V}\overline{V}$

$$p(X = 2) = \frac{C_2^2 \times C_8^2}{210} = \frac{1\times 28}{210} = \frac{2}{15}$$

ب-

✓ $X = 0 \rightarrow \overline{V}\overline{V}\overline{V}\overline{V}$

$$p(X = 0) = \frac{C_8^4}{210} = \frac{70}{210} = \frac{1}{3}$$

✓ $X = 1 \rightarrow V\overline{V}\overline{V}\overline{V}$

$$p(X = 1) = p(A) = \frac{8}{15}$$

✓ $p(X=2)=\frac{2}{15}$

قانون احتمال X :

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

الأمل الرياضي :

$$E(X)=\left(0\times\frac{1}{3}\right)+\left(1\times\frac{8}{15}\right)+\left(2\times\frac{2}{15}\right)=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$$

تصحيح التمرين الثالث

1) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+4z+8=0$

لدينا : $\Delta=(4)^2-4(1)(8)=16-32=-16$

بما أن $\Delta<0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين

$$z=\frac{-4+i\sqrt{16}}{2(1)}=\frac{-4+4i}{2}=-2+2i$$ أو

$$z=\frac{-4-i\sqrt{16}}{2(1)}=\frac{-4-4i}{2}=-2-2i$$

إذن : $S=\{-2-2i,-2+2i\}$

2) أ-

$$z'-a=e^{i\left(\frac{-\pi}{2}\right)}(z-a)$$
$$z'-(-2+2i)=-i\left(z-(-2+2i)\right)$$
$$z'+2-2i=-i\left(z+2-2i\right)$$
$$z'+2-2i=-iz-2i-2$$
$$z'=-iz-2i-2-2+2i$$
$$z'=-iz-4$$

ب-

✓ لدينا :

$$\begin{aligned}-ic-4 &= -i\left(4+8i\right)-4\\ &= -4i+8-4\\ &= 4-4i\\ &= b\end{aligned}$$

إذن : B هي صورة النقطة C بالدوران R

✓ لدينا $R\left(C\right)=B$ إذن $\begin{cases} AC=AB \\ \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\dfrac{-\pi}{2}\left[2\pi\right]\end{cases}$

و منه المثلث ABC متساوي الساقسن و قائم الزاوية في A.

3) أ- لدينا Ω منتصف القطعة $\left[BC\right]$

إذن : $\omega=\dfrac{b+c}{2}=\dfrac{4-4i+4+8i}{2}=\dfrac{8+4i}{2}=4+2i$

و منه : $\left|c-\omega\right|=\left|\left(4+8i\right)-\left(4+2i\right)\right|=\left|6i\right|=6$

ب- لنحدد مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث $\left|z-\omega\right|=6$

$$\left|z-\omega\right|=6\Leftrightarrow\Omega M=6$$

إذن مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها Ω و شعاعها 6

و لدينا Ω منتصف القطعة $\left[BC\right]$ و $\left|c-\omega\right|=6$ إذن $\Omega C=\Omega B$

و من الواضح أن $|a-\omega| = |-2+2i-4-2i| = |-6| = 6$ إذن $\Omega A = \Omega C = \Omega B$

و بالتالي : مجموعة النقط M هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

تصحيح التمرين الرابع

1) أ-

✓ من أجل $n=0$:

لدينا $u_0 = 17$

إذن $u_0 > 16$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$:

نفترض أن $u_n > 16$

و نبين أن $u_{n+1} > 16$ ؟

حسب الإفتراض لدينا : $u_n > 16$

إذن : $\frac{1}{4}u_n > 4$

إذن : $\frac{1}{4}u_n + 12 > 4 + 12$

و منه : $u_{n+1} > 16$

✓ نستنتج أن : $u_n > 16$ لكل n من $\mathbb{N}$

ب-

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$:

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n + 12 - u_n = \left(\frac{1}{4} - 1\right)u_n + 12 = \frac{-3}{4}u_n + 12 = \frac{-3}{4}(u_n - 16)$

حسب نتيجة السؤال 1) أ- لدينا : $u_n > 16$ إذن $u_n - 16 > 0$ إذن $\frac{-3}{4}(u_n - 16) < 0$

و منه $u_{n+1} - u_n < 0$ لكل n من $\mathbb{N}$

وبالتالي (u_n) تناقصية.

✓ بما أن (u_n) تناقصية و مصغورة فإن (u_n) متقاربة .

2) أ− ليكن $n \in \mathbb{N}$:

لدينا : $v_{n+1} = u_{n+1} - 16 = \frac{1}{4}u_n + 12 - 16 = \frac{1}{4}u_n - 4 = \frac{1}{4}(u_n - 16) = \frac{1}{4}v_n$

إذن : $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ و حدها الأول : $v_0 = u_0 - 16 = 17 - 16 = 1$

ب− ليكن $n \in \mathbb{N}$:

لدينا : $v_n = v_0 \times q^n$ إذن : $v_n = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

ولدينا : $v_n = u_n - 16$ إذن : $u_n = 16 + v_n$

و منه : $u_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

ج−

$$
\begin{aligned}
u_n < 16{,}0001 \quad &\Leftrightarrow 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n < 16{,}0001 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n < 0{,}0001 \\
&\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) < \ln(0{,}0001) \\
&\Leftrightarrow n.\ln\left(\frac{1}{4}\right) < \ln(0{,}0001) \\
&\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0{,}0001)}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}
\end{aligned}
$$

إذن : أصغر قيمة للعدد الصحيح الطبيعي n التي يكون من أجلها $u_n < 16{,}0001$ هي : $\boxed{n = 7}$

تصحيح المسألة

I.

1) $g(0)=1-(0+1)^2 e^0=1-1\times 1=0$

2) مبيانيا :

✓ على المجال $]-\infty,0]$: لدينا (C_g) يوجد فوق محور الأفاصيل إذن : $g(x)\geq 0$

✓ و على المجال $[0,+\infty[$: لدينا (C_g) يوجد تحت محور الأفاصيل إذن : $g(x)\leq 0$

II.

1) أ-

✓ ليكن $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)=x+1-(x^2+1)e^x=x+1-x^2e^x-e^x=x+1-4\times\frac{x^2}{4}\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2-e^x=x+1-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2-e^x$$

إذن : $f(x)=x+1-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2-e^x$ لكل x من $\mathbb{R}$

✓ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x+1-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2-e^x=-\infty$

لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}x+1=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\end{cases}$

ب-

✓ لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2-e^x=0$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{2}e^{\frac{x}{2}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0 \end{cases}$

✓ بما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$ فإن المستقيم (D) ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

ج- لدينا : $f(x)=x+1-(x^2+1)e^x$ لكل x من $\mathbb{R}$

إذن : $f(x)-(x+1)=-(x^2+1)e^x$ لكل x من $\mathbb{R}$

و منه : $f(x)-(x+1)<0$ لكل x من $\mathbb{R}$

و بالتالي : المنحنى (C_f) يوجد تحت المستقيم (D)

2) أ- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left[1+\dfrac{1}{x}-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)e^{x}\right] = -\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty \end{cases}$

ب- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x}-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)e^{x} = -\infty$

إذن المنحنى (C_f) يقبل بجوار $+\infty$، فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب .

3) أ− الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(x+1-\left(x^2+1\right)e^x\right)' \\
&= 1-\left(\left(x^2+1\right)'e^x+\left(x^2+1\right)\left(e^x\right)'\right) \\
&= 1-\left(2xe^x+\left(x^2+1\right)e^x\right) \\
&= 1-\left(x^2+2x+1\right)e^x \\
&= 1-\left(x+1\right)^2 e^x \\
&= g(x)
\end{aligned}
$$

إذن : $f'(x)=g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب− لدينا : $f'(x)=g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

- ✓ على المجال $]-\infty,0]$: $g(x)\geq 0$ إذن $f'(x)\geq 0$ و منه f تزايدية
- ✓ على المجال $[0,+\infty[$: $g(x)\leq 0$ إذن : $f'(x)\leq 0$ و منه f تناقصية

<u>جدول تغيرات الدالة f :</u>

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

ج− الدالة f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

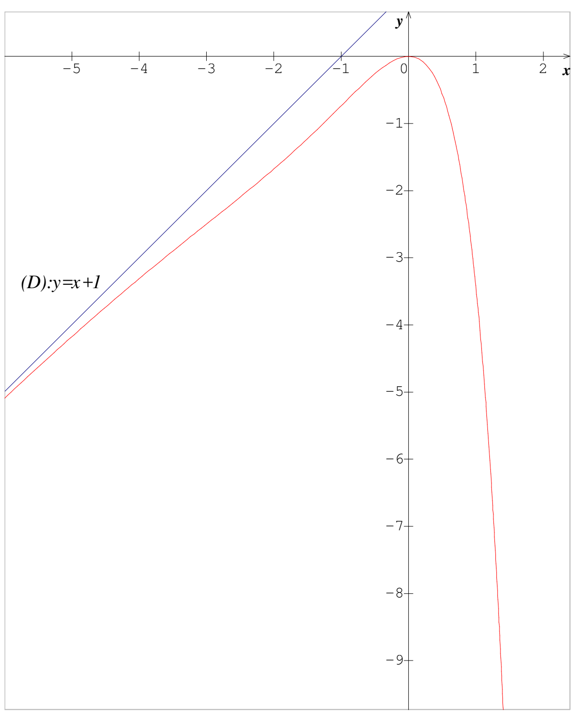
$$\begin{aligned}
f''(x) &= (f')'(x) \\
&= g'(x) \\
&= \left(1-(x+1)^2 e^x\right)' \\
&= 0-\left(\left((x+1)^2\right)' e^x + (x+1)^2 \left(e^x\right)'\right) \\
&= -\left(2(x+1)e^x + (x+1)^2 e^x\right) \\
&= -(x+1)e^x\,(2+x+1) \\
&= -(x+1)(x+3)e^x
\end{aligned}$$

لدينا : $e^x > 0$ إذن إشارة $f''(x)$ هي إشارة $-(x+1)(x+3)$

x	$-\infty$ $\quad -3 \quad\quad -1 \quad +\infty$
$f''(x)$	$- \quad 0 \quad + \quad 0 \quad -$

بما أن f'' تنعدم و تغير إشارتها عند العددين -3 و -1 فإن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما -3 و -1

(4



5) أ-

❖

✓ الدالة H قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

✓ ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$H'(x) = \left((x-1)e^x\right)' = (x-1)'e^x + (x-1)\left(e^x\right)' = 1.e^x + (x-1)e^x = xe^x$$

إذن لكل x من $\mathbb{R}$: $H'(x) = h(x)$

❖ $\int_{-1}^{0} xe^x dx = \left[(x-1)e^x\right]_{-1}^{0} = (-1) - \left(-2e^{-1}\right) = \frac{2}{e} - 1$

ب-

$$\begin{cases} u(x) = x^2+1 \\ v'(x) = e^x \end{cases} \searrow \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = e^x \end{cases} \downarrow$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0}\left(x^2+1\right)e^x dx &= \left[\left(x^2+1\right)e^x\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} 2xe^x dx \\ &= 1 - 2e^{-1} - 2\int_{-1}^{0} xe^x dx \\ &= 1 - \frac{2}{e} - 2\left(\frac{2}{e} - 1\right) \\ &= 1 - \frac{2}{e} - \frac{4}{e} + 2 \\ &= 3 - \frac{6}{e} \\ &= 3\left(1 - \frac{2}{e}\right) \end{aligned}$$

ج- مساحة الحيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيم (D) و محور الأراتيب و المستقيم الذي معادلته $x = -1$

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{0} \left| f(x) - (x+1) \right| dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \\
&= \int_{-1}^{0} \left((x+1) - f(x) \right) dx \times 2cm \times 2cm \\
&= \int_{-1}^{0} \left(x^2 + 1 \right) e^x dx \times 4cm^2 \\
&= 3\left(1 - \frac{2}{e} \right) \times 4cm^2 \\
&= 12\left(1 - \frac{2}{e} \right).cm^2
\end{aligned}
$$

つづく