ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵣⵣⴰⵢⴰⵏ
ⴷ ⵓⵙⵙⵍⵎⴷ ⴰⵏⴰⴼⵍⵍⴰ ⴷ ⵓⵔⵣⵣⵓ ⴰⵎⴰⵙⵙⴰⵏ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2018

-الموضوع-

NS22

★★

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها	المعامل	7

تعليمات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة .

مكونات الموضوع

يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين و مسألة، مستقلة فيما بينها، و تتوزع حسب المجالات كما يلي:

التمرين الأول	الهندسة الفضائية	3 نقط
التمرين الثاني	الأعداد العقدية	3 نقط
التمرين الثالث	حساب الاحتمالات	3 نقط
المسألة	دراسة دالة عددية و حساب التكامل و المتتاليات العددية	11 نقطة

التمرين الأول (3 نقط):

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط $A(0,-2,-2)$ و $B(1,-2,-4)$ و $C(-3,-1,2)$

1 **1)** بين أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ ثم استنتج أن $2x+2y+z+6=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

2) لتكن (S) الفلكة التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$

0.5 تحقق من أن مركز الفلكة (S) هو $\Omega(1,0,1)$ و أن شعاعها هو $R=5$

0.25 **3)** أ- تحقق من أن $\begin{cases}x=1+2t\\y=2t\\z=1+t\end{cases};(t\in\mathbb{R})$ هو تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) المار من Ω و العمودي على المستوى (ABC)

0.5 ب- حدد إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (ABC)

0.75 **4)** تحقق من أن $d(\Omega,(ABC))=3$ ثم بين أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة شعاعها 4 يتم تحديد مركزها.

التمرين الثاني (3 نقط) :

0.75 **1)** حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $2z^2+2z+5=0$

2) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$، نعتبر R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$

0.25 أ - أكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي $d=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ب – لتكن النقطة A التي لحقها $a=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ و B صورة النقطة A بالدوران R

0.5 ليكن b لحق النقطة B، بين أن $b=d.a$

3) لتكن t الإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OA}$ و النقطة C صورة B بالإزاحة t و c لحق النقطة C

0.75 أ - تحقق من أن $c=b+a$ ثم استنتج أن $c=a\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ (يمكنك استعمال السؤال 2) ب-)

0.75 ب - حدد $\arg\left(\frac{c}{a}\right)$ ثم استنتج أن المثلث OAC متساوي الأضلاع .

التمرين الثالث (3 نقط) :

يحتوي صندوق على 9 كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس : <u>خمس كرات حمراء</u> تحمل الأعداد 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2

و <u>أربع كرات بيضاء</u> تحمل الأعداد 1 ; 2 ; 2 ; 2

نعتبر التجربة التالية : نسحب عشوائيا و تآنيا 3 كرات من الصندوق .

لتكن الأحداث : A : "الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون " و B : "الكرات الثلاث المسحوبة تحمل نفس العدد "

و C : "الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون و تحمل نفس العدد "

1.5 **1)** بين أن : $p(A)=\frac{1}{6}$ و $p(B)=\frac{1}{4}$ و $p(C)=\frac{1}{42}$

2) نعيد التجربة السابقة 3 مرات مع إعادة الكرات الثلاث المسحوبة إلى الصندوق بعد كل سحبة، و نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A

0.5 أ- حدد وسيطي المتغير العشوائي الحداني X

1 ب- بين أن : $p(X=1)=\frac{25}{72}$ و احسب $p(X=2)$

المسألة (11 نقطة) :

I - لتكن g الدالة العددية المعرفة على IR كما يلي : $g(x)=e^{x}-x^{2}+3x-1$

الجدول جانبه يمثل جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	+
$g(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

0.25 — 1) تحقق من أن $g(0)=0$

0.5 — 2) حدد إشارة $g(x)$ على كل من المجالين $]-\infty,0]$ و $[0,+\infty[$

II– لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي:

$$f(x)=(x^{2}-x)\,e^{-x}+x$$

و (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة 1cm)

0.5 — 1) أ- تحقق من أن $f(x)=\dfrac{x^{2}}{e^{x}}-\dfrac{x}{e^{x}}+x$ لكل x من IR ثم بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

0.75 — ب – احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)$ ثم استنتج أن المنحنى (C) يقبل مقاربا (D) بجوار $+\infty$ معادلته $y=x$

0.5 — ج – تحقق من أن $f(x)=\dfrac{x^{2}-x+x\,e^{x}}{e^{x}}$ لكل x من IR ثم احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

0.5 — د – بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ ثم أول النتيجة هندسيا.

0.25 — 2) أ – تحقق من أن $f(x)-x$ و $x^{2}-x$ لهما نفس الإشارة لكل x من IR

0.5 — ب – استنتج أن (C) يوجد فوق (D) على كل من المجالين $]-\infty,0]$ و $[1,+\infty[$ و تحت (D) على المجال $[0,1]$

0.75 — 3) أ - بين أنه لكل x من IR لدينا $f'(x)=g(x)\,e^{-x}$

0.5 — ب – استننتج أن الدالة f تناقصية على $]-\infty,0]$ و تزايدية على $[0,+\infty[$

0.25 — ج – ضع جدول تغيرات الدالة f

0.25 — 4)أ- تحقق من أن $f''(x)=(x^{2}-5x+4)e^{-x}$ لكل x من IR

0.5 — ب- استنتج أن المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما على التوالي هما 1 و 4

1 — 5) أنشئ (D) و (C) في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نأخذ $f(4)\approx 4.2$)

0.5 — 6) أ – بين أن الدالة $H:x\mapsto(x^{2}+2x+2)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto-x^{2}e^{-x}$ على IR

ثم استنتج أن $\displaystyle\int_{0}^{1}x^{2}e^{-x}dx=\frac{2e-5}{e}$

0.75 — ب – باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $\displaystyle\int_{0}^{1}xe^{-x}dx=\frac{e-2}{e}$

0.75 — ج – احسب ب cm^{2} مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (D) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$

III – لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0=\dfrac{1}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $I\!N$

0.75 — 1) بين أن $0\le u_n\le 1$ لكل n من $I\!N$ (*يمكن استعمال نتيجة السؤال II– 3) ب-*)

0.5 — 2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية .

0.75 — 3) استنتج أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.

.01

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقطة $A(0,-2,-2)$ و $B(1,-2,-4)$ و $C(-3,-1,2)$.

.01 نبين أن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$. استنتج أن $2x+2y+z+6=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) . ..... (1 ن)

- نبين أن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$.

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-0\\-2+2\\-4+2\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}=\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3-0\\-1+2\\2+2\end{pmatrix}$.

و منه : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}0&1\\-2&4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&-3\\-2&4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&-3\\0&1\end{vmatrix}\vec{k}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

خلاصة : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

- نستنتج أن : $2x+2y+z+6=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

طريقة 1 :

✓ لدينا : المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ أي المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2,2,1)$ منظمية على المستوى (ABC)

✓ ومنه : $M(x,y,z)\in(ABC)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-0\\y+2\\z+2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow 2(x-0)+2(y+2)+1(z+2)=0$$
$$\Leftrightarrow 2x+2y+4+z+2=0$$
$$\Leftrightarrow 2x+2y+z+6=0$$

خلاصة : $2x+2y+z+6=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

طريقة 2 :

- المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2,2,1)$ متجهة منظمية على (ABC) إذن معادلة ديكارتية له هي على شكل $2x+2y+1z+d=0$.
- النقطة $A(0,-2,-2)$ تنتمي إلى المستوى (ABC) فإن : $2\times0+2\times(-2)+1(-2)+d=0$ و منه : $d=6$.

خلاصة: $2x+2y+z+6=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

.02 لتكن (S) الفلكة التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$. نتحقق من أن مركز الفلكة (S) هو $\Omega(1,0,1)$ و شعاعها هو $R=5$ . ... (0.5 ن)

لدينا : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0\Leftrightarrow x^2-2x+1-1+(y-0)^2++z^2-2z+1-1-23=0$

$$\Leftrightarrow(x-1)^2-1+(y-0)^2+(z-1)^2-1-23=0$$
$$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=25=5^2$$

و هي تمثل معادلة ديكارتية لفلكة مركزها $\Omega(1,0,1)$ و شعاعها $R=5$.

خلاصة : مركز الفلكة (S) هي النقطة $\Omega(1,0,1)$ و أن شعاعها $R=5$.

03. .. .. (0.25 ن) لسؤال أ

أ- نتحقق من أن : $(t\in\mathbb{R})$; $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases}$ هو تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) المار من Ω و العمودي على المستوى (ABC)

✓ بما أن : (Δ) عمودي على المستوى (ABC) إذن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2,2,1)$ متجهة منظمية على (ABC) فهي موجهة للمستقيم (Δ) و (Δ) يمر من Ω (أي $\Omega(1,0,1)\in(\Delta)$)

✓ إذن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) هو : $(t\in\mathbb{R})$; $(\Delta) : \begin{cases} x=1+2t=1+2t \\ y=0+2t=2t \\ z=1+t=1+t \end{cases}$

خلاصة : تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) هو : $(t\in\mathbb{R})$; $(\Delta) : \begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases}$.

ب- نحدد إحداثيات النقطة H تقاطع المستوى (ABC) و المستقيم (Δ) . ... (0.5 ن)

$$M(x,y,z)\in(ABC)\cap(\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} M\in(ABC) \\ M\in(\Delta) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y+z+6=0 \\ \begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(1+2t)+2\times2t+(1+t)+6=0 \\ \begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9t+9=0 \\ \begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ \begin{cases} x=1+2\times(-1)=-1 \\ y=2\times(-1)=-2 \\ z=1-1=0 \end{cases} \end{cases}$$

ومنه : تقاطع المستوى (ABC) و المستقيم (Δ) هي النقطة $H(-1,-2,0)$.

04. نتحقق من أن $d(\Omega,(ABC))=3$ ثم نبين أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة شعاعها 4 يتم تحديد مركزها .

- نتحقق من أن : $d(\Omega,(ABC))=3$ (أي المسافة بين النقطة $\Omega(1,0,1)$ مركز الفلكة و المستوى (ABC)) .. (0.75 ن)

لدينا : $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|2\times1+2\times0+1\times1+6|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\dfrac{9}{\sqrt{9}}=\dfrac{9}{3}=3$.

خلاصة : $d(\Omega,(ABC))=3$.

- نبين أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة شعاعها 4 يتم تحديد مركزها .

نعلم أن شعاع الفلكة (S) هو $R=5$ ومنه $d(\Omega,(ABC))<R$.

خلاصة 1 : المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة .

✓ نحدد شعاعها : نضع R_C شعاع الدائرة ومنه $R_C=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$.

✓ نحدد مركزها : مركزها هو المسقط العمودي ل Ω مركز الفلكة (S) على المستوى (ABC) أي تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (ABC) و حسب ما سبق التقاطع هو النقطة $H(-1,-2,0)$.

خلاصة 2: المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة شعاعها 4 و مركزها النقطة $H(-1,-2,0)$.

.02

.01 نحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $2z^2+2z+5=0$ . ... (0.75 ن)

✓ نحسب المميز Δ : لدينا : $\Delta=2^2-4\times2\times5=4-40=-36<0$

إذن المعادلة لها حلين عقديين مترافقين هما : $z_1=\dfrac{-2+i\sqrt{-\Delta}}{2\times2}=\dfrac{-2+6i}{4}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$ و $z_2=\overline{z_1}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$.

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة هي : $S=\left\{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i\ ;\ -\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i\right\}$

.02 في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\dfrac{2\pi}{3}$

أ- نكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي $d=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ . ... (0.25 ن)

طريقة 1 :

نعلم أن : إذا كان $z=[r,\alpha]$ فإن $-\bar{z}=[r,\pi-\alpha]=r(\cos(\pi-\alpha)+i\sin(\pi-\alpha))$

لدينا : $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}=\left[1,\dfrac{\pi}{3}\right]$

من جهة أخرى :

$$d=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\overline{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}=-\left(\overline{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

خلاصة : الشكل المثلثي ل d هو : $d=\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

طريقة 2 :

نضع $\arg(d) \equiv \alpha\ [2\pi]$ و لدينا : $|d| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ ومنه : $\left.\begin{array}{l}\cos\alpha = \frac{\operatorname{Re}(d)}{|d|} = -\frac{1}{2}\\ \sin\alpha = \frac{\operatorname{Im}(d)}{|d|} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}$ إذن $\alpha \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

خلاصة : الشكل المثلثي ل d هو : $d = |d|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right]$.

طريقة 3 :

نلاحظ أن :

- $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \left[1, \frac{\pi}{3}\right]$ و منه $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \left[1, -\frac{\pi}{3}\right]$ و لدينا $-1 = \cos\pi + i\sin\pi = [1, \pi]$.
- إذن : $d = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = -1 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = [1, \pi] \times \left[1, -\frac{\pi}{3}\right] = \left[1, \pi - \frac{\pi}{3}\right] = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right]$

خلاصة : الشكل المثلثي ل d هو : $d = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right]$.

ب- لتكن النقطة A التي لحقها $a = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ و B صورة النقطة A بالدوران R . ليكن b لحق النقطة B ، بين أن $b = d.a$ (0.5 ن)

الكتابة العقدية للدوران R هي : $z' - \omega = (z - \omega)e^{i\theta}$ مع ω هو لحق مركز الدوران و θ هو زاوية الدوران .

ومنه : $z' - 0 = (z - 0)e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ؛ (لأن $\omega = 0$ هو لحق O مركز الدوران R و $\theta = \frac{2\pi}{3}$ زاوية الدوران)

$z' = z \times d$ ؛ (لأن $d = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right] = e^{i\frac{2\pi}{3}}$)

و بالتالي الكتابة العقدية للدوران R هي $z' = z \times d$

من جهة أخرى : $R(A) = B \Leftrightarrow b = ad$ (لأن $z' = z \times d$) .

خلاصة : $b = d.a$.

03. لتكن t الإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OA}$ و النقطة C صورة B بالإزاحة t و c لحق النقطة C .

أ- نتحقق من أن $c = b + a$ ثم استنتج أن $c = a\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ (يمكنك استعمال السؤال 2) ب –) .... (0.75 ن)

- نتحقق من أن : $c = b + a$.

طريقة 1 :

لدينا : $t(B) = C \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}$

$\Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{BC}} = Z_{\overrightarrow{OA}}$ ($Z_{\overrightarrow{BC}}$ لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$ و $Z_{\overrightarrow{OA}}$ لحق المتجهة $\overrightarrow{OA}$)

$\Leftrightarrow c - b = a - 0$

$\Leftrightarrow c = b + a$

خلاصة : $c = b + a$.

طريقة 2 :

الكتابة العقدية للإزاحة t هي : $z' = z + a$ مع a هو لحق $\overrightarrow{OA}$ متجهة الإزاحة t

و منه : $t(B)=C \Leftrightarrow c=b+a$ (لأن $z'=z+a$) .

خلاصة : $c=b+a$.

- نستنتج أن $c=a\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

لدينا :

$$\begin{aligned} c&=b+a \\ &=da+a \quad ; \quad (b=da) \\ &=a(d+1) \\ &=a\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+1\right)=a\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{aligned}$$

خلاصة : $c=a\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

ب- نحدد : $\arg\left(\frac{c}{a}\right)$ ثم نستنتج أن المثلث OAC متساوي الأضلاع . ... (0.75 ن)

- نحدد : $\arg\left(\frac{c}{a}\right)$

لدينا : $\frac{c}{a}=\frac{\cancel{a}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\cancel{a}}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (لأن $c=a\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$)

ومنه : $\arg\left(\frac{c}{a}\right)\equiv\arg\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \quad [2\pi]$

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{c}{a}\right)&\equiv\arg\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) \quad [2\pi] \\ &\equiv\frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \end{aligned}$$

خلاصة : $\arg\left(\frac{c}{a}\right)\equiv\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

- نستنتج أن المثلث OAC متساوي الأضلاع .

طريقة 1 : (التي كان يهدف إليها صاحب التمرين)

لدينا :

- حسب ما سبق : B صورة النقطة A بالدوران R إذن $OA=OB$ (حسب تعريف الدوران)
- حسب ما سبق : C صورة النقطة B بالإزاحة t ذات المتجهة $\overrightarrow{OA}$ إذن $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$ و منه الرباعي OACB متوازي الأضلاع و له ضلعين متتابعين متقايسين (لأن $OA=OB$) إذن OACB هو معين إذن $OA=OC$.

استنتاج 1 : $OA=OC$.

- لدينا : $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right)\equiv\arg\left(\frac{c-0}{a-0}\right) \quad [2\pi]$

$$\equiv \arg\left(\frac{c}{a}\right) \quad [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

استنتاج 2 : $\overline{\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)} \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

من خلال الإستنتاج 1 و 2 نحصل على : المثلث OAC له زاوية AOC قياسها $\frac{\pi}{3}$ و ضلعيها متقايسين ($OA = OC$) إذن

المثلث OAC متساوي الأضلاع

خلاصة : المثلث OAC متساوي الأضلاع .

طريق 2 :

حسب ما سبق : $\frac{c}{a} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ و منه :

❖ $\frac{OC}{OA} = 1 \Leftrightarrow \frac{|c-0|}{|a-0|} = \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \left|\frac{c-0}{a-0}\right|$ إذن $OA = AC \quad (1)$

❖ $\arg\left(\frac{c-0}{a-0}\right) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{c}{a}\right) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

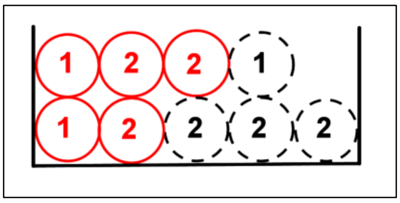
$$\Leftrightarrow \overline{\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)} \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \quad (2)$$

من خلال (1) و (2) المثلث OAC متساوي الأضلاع .

طريقة 3 : لدينا : $\frac{c-0}{a-0} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ إذن $\frac{c-0}{a-0} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه المثلث OAC متساوي الأضلاع .

.03

يحتوي صندوق: على 9 كرات لا يمكن التميز بينها باللمس خمس كرات حمراء تحمل الأعداد 2 ؛ 2 ؛ 2 ؛ 1 ؛ 1 و أربع كرات بيضاء تحمل الأعداد 2 ؛ 2 ؛ 2 ؛ 1 .



نعتبر التجربة التالية : نسحب عشوائيا و تآنيا ثلاث كرات من الصندوق .

لتكن الأحداث :

✓ الحدث A : " الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون "

✓ الحدث B : " الكرات الثلاث المسحوبة تحمل نفس العدد "

✓ الحدث C : " الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون و تحمل نفس العدد "

.01 نبين أن : $p(A) = \frac{1}{6}$ و $p(B) = \frac{1}{4}$ و $p(C) = \frac{1}{42}$ . ... (1.5 ن)

✓ عدد السحبات الممكنة (أي $card\Omega$) :

سحب ثلاث كرات في آن واحد من بين 9 كرات يمثل تأليفة ل 3 من بين 9 . ومنه عدد السحبات هو عدد التأليفات ل 3 من بين 9 إذن : $card\Omega = C_9^3 = \frac{9\times8\times7}{1\times2\times3} = 84$

إذن : $card\Omega = C_9^3 = 84$.

• نبين أن : $p(A)=\frac{1}{6}$.

✓ عدد السحبات التي نريد أن تحقق الحدث A (أي cardA) :

الحدث A نعبر عنه أيضا بما يلي : A " الكرات الثلاث المسحوبة من اللون الأحمر أو الكرات الثلاث المسحوبة من اللون الأبيض "

❖ الكرات الثلاث المسحوبة في آن واحد من اللون الأحمر من بين 5 إذن $C_5^3=\frac{5\times4\times3}{1\times2\times3}=10$ (ملحوظة $C_5^3=C_5^2=10$)

❖ أو الكرات الثلاث المسحوبة في آن واحد من اللون الأبيض من بين 4 إذن $C_4^3=\frac{4\times3\times2}{1\times2\times3}=4$ (ملحوظة $C_4^3=C_4^1=4$)

و منه : $cardA=C_5^3+C_4^3=10+4=14$.

ومنه : $p(A)=\frac{cardA}{card\Omega}=\frac{C_5^3+C_4^3}{C_9^3}=\frac{14}{84}=\frac{\cancel{14}}{\cancel{14}\times6}=\frac{1}{6}$.

خلاصة : $p(A)=\frac{1}{6}$

❖ نبين أن : $p(B)=\frac{1}{4}$.

✓ عدد السحبات التي نريد أن تحقق الحدث B (أي cardB) :

الحدث B نعبر عنه أيضا بما يلي : A " (الكرات الثلاث المسحوبة من بين الكرات التي تحمل العدد ② و عددها 6) أو (الكرات الثلاث المسحوبة من بين الكرات التي تحمل العدد ① و عددها 3) "

▪ الكرات الثلاث المسحوبة من بين الكرات التي تحمل العدد ② .

أي سحب ثلاث كرات في آن واحد من بين 6 كرات (التي تحمل العدد ②) يمثل تأليفة ل 3 من بين 6 وهي تتم ب

$C_6^3=\frac{6\times5\times4}{1\times2\times3}=20$ كيفيات مختلفة .

▪ الكرات الثلاث المسحوبة من بين الكرات التي تحمل العدد ① .

▪ أي سحب ثلاث كرات في آن واحد من بين 3 كرات (التي تحمل العدد ①) يمثل تأليفة ل 3 من بين 3 وهي تتم ب

$C_3^3=1$ كيفية مختلفة .

▪ ومنه $cardB=C_6^3+C_3^3=20+1=21$

ومنه : $p(B)=\frac{cardB}{card\Omega}=\frac{C_6^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{21}{84}=\frac{\cancel{21}}{\cancel{21}\times4}=\frac{1}{4}$.

خلاصة : $p(B)=\frac{1}{4}$

❖ نبين أن : $p(C)=\frac{1}{42}$.

✓ عدد السحبات التي نريد أن تحقق الحدث C (أي cardC) :

الحدث C نعبر عنه أيضا بما يلي : C " (الكرات الثلاث المسحوبة من بين الكرات ذات اللون الأحمر و التي تحمل العدد ②) أو (الكرات الثلاث المسحوبة من بين الكرات ذات اللون الأبيض و التي تحمل العدد ②) "

❖ الكرات الثلاث المسحوبة في آن واحد من بين الكرات ذات اللون الأحمر و التي تحمل العدد ② و عددها 3 كرات إذن $C_3^3=1$.

❖ أو الكرات الثلاث المسحوبة في آن واحد من بين الكرات ذات اللون الأبيض و التي تحمل العدد ② و عددها 3 كرات إذن $C_3^3=1$

و منه : $cardC=C_3^3+C_3^3=2$

و بالتالي : ومنه : $p(C)=\frac{cardC}{card\Omega}=\frac{C_3^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{2}{84}=\frac{\cancel{2}}{42\times\cancel{2}}=\frac{1}{42}$.

خلاصة : $p(C)=\frac{1}{42}$

.02 نعيد التجربة السابقة 3 مرات مع إعادة الكرات الثلاث المسحوبة إلى الصندوق بعد كل سحبة ؛ و نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A .

أ- نحدد وسيطي المتغير العشوائي الحداني X . ... (0.5 ن)

الوسيطي هما :

- $n=3$ (الذي يمثل عدد المرات التي أعيدت فيها التجربة و في نفس الظروف)
- $p=p(A)=\frac{1}{6}$ (احتمال الحدث A الذي نهتم بعدد المرات الذي يتحقق فيها بعد إعادة التجربة 3 مرات و في نفس الظروف .
- إضافات :

✓ القيم هي 0 و 1 و 2 و 3 .

✓ لدينا : $p(X=k)=C_3^k\times p^k(1-p)^{3-k}$ مع $k\in\{0,1,2,3\}$

✓ الأمل الرياضي هو $E(X)=np$ و المغايرة هي $V(X)=n\times p\times(1-p)$.

✓ الإنحراف الطرازي هو $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{n\times p\times(1-p)}$

و كل ذلك بالنسبة لمتغير عشوائي حداني .

ب- نبين أن : $p(X=1)=\frac{25}{72}$. و نحسب $p(X=2)$ . ... (1 ن)

لدينا : X متغير عشوائي حداني إذن : $p(X=k)=C_3^k\times p^k(1-p)^{3-k}$ مع $k\in\{0,1,2,3\}$ ؛ و منه :

- $p(X=1)=C_3^1\times p^1\times(1-p)^2=3\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{1}{2}\times\frac{25}{36}=\frac{25}{72}$.
- $p(X=2)=C_3^2\times p^2\times(1-p)^1=3\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^1=3\times\frac{1}{36}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{72}$

خلاصة : $p(X=1)=\frac{25}{72}$ و $p(X=2)=\frac{5}{72}$

.04

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=e^x-x^2+3x-1$.

x	$-\infty$ \hfill $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

.I

.01 نتحقق أن : $g(0)=0$ . ... (0.25 ن)

لدينا : $g(0)=e^0-0^2+3\times0-1=1-0+0-1=0$.

خلاصة : $g(0)=0$.

.02 حدد إشارة $g(x)$ على كل من المجالين $]-\infty,0]$ و $[0,+\infty[$ .... (0.5 ن)

✓ الإشارة على $]-\infty,0]$:

من خلال جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن الدالة g تزايدية على $\mathbb{R}$ إذن تزايدية على $]-\infty,0]$:

$$x\le0\Rightarrow g(x)\le g(0)$$
$$\Rightarrow g(x)\le0\qquad;\ (g(0)=0)$$

و منه : $g(x) \leq 0$ لكل x من $]-\infty, 0]$. (أي الدالة g سالبة على $]-\infty, 0]$) .

✓ الإشارة على $[0, +\infty[$:

من خلال جدول تغيرات الدالة g لدينا : الدالة تزايدية على $\mathbb{R}$ إذن تزايدية على $[0, +\infty[$ و منه :

$$x \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq g(0)$$
$$\Rightarrow g(x) \geq 0 \quad ; \ (g(0) = 0)$$

و منه : $g(x) \geq 0$ لكل x من $[0, +\infty[$. (أي الدالة g موجبة على $[0, +\infty[$) .

خلاصة : الدالة g موجبة على $[0, +\infty[$ و سالبة على $]-\infty, 0]$.

.II لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x$.

و (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (الوحدة 1 cm) .

.01 ..

أ- تحقق من أن : $f(x) = \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم بين أن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ . ... (0.5 ن)

• نتحقق من أن : $f(x) = \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x$ لكل x من $\mathbb{R}$

لدينا :
$$f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x$$
$$= x^2e^{-x} - xe^{-x} + x$$
$$= \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x \quad ; \ \left(e^{-x} = \frac{1}{e^x}\right)$$

خلاصة : $f(x) = \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x$ لكل x من $\mathbb{R}$.

• نبين أن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

نعلم أن :

❖ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ مع $n \in \mathbb{N}^*$ و منه : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ إذن $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$.

❖ $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

و منه : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x = +\infty$

خلاصة : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

ب- نحسب : $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x)$ ثم استنتج أن المنحنى (C) يقبل مقاربا (D) بجوار $+\infty$ معادلته $y = x$ . ... (0.75 ن)

• نحسب : $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x)$.

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+\cancel{x}\right)-\cancel{x}$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}$$
$$=0$$

$$\left(\left(n\in\mathbb{N}^*\right)\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0\ \text{ et }\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0\end{cases}\right)$$

خلاصة : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=0$

- نستنتج أن المنحنى (C) يقبل مقاربا (D) بجوار $+\infty$ معادلته $y=x$.

لدينا :

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x)\right)=0$.

إذن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ هو مقارب مائل للمنحنى (C) للدالة f بجوار $+\infty$.

خلاصة : المنحنى (C) يقبل مقاربا مائلا هو المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ بجوار $+\infty$.

ج- نتحقق من أن : $f(x)=\frac{x^2-x+xe^x}{e^x}$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم نحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ . ... (0.5 ن)

- نتحقق من أن : $f(x)=\frac{x^2-x+xe^x}{e^x}$ لكل x من $\mathbb{R}$

لدينا :

$$\frac{x^2-x+xe^x}{e^x}=\frac{x^2-x}{e^x}+\frac{x\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}}$$
$$=\left(x^2-x\right)e^{-x}+x\qquad;\ \left(e^{-x}=\frac{1}{e^x}\right)$$
$$=f(x)$$

خلاصة : $f(x)=\frac{x^2-x+xe^x}{e^x}$ لكل x من $\mathbb{R}$.

- نحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

نلاحظ أن : $f(x)=\frac{x^2-x+xe^x}{e^x}=\left(x^2-x+xe^x\right)\times\frac{1}{e^x}$ و لدينا :

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ (خاصية) و $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2-x=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-x+xe^x\right)=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0^+$ ($\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ و $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ e^x>0$) إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}=+\infty$.

و منه : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+xe^x}{e^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-x+xe^x\right)\times\frac{1}{e^x}=+\infty\ ;\ (+\infty\times+\infty)$

خلاصة : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

د- نبين أن : $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ ثم نؤول هندسيا النتيجة . ... (0.5 ن)

- نبين أن : $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$.

لدينا :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2-x+xe^x}{e^x}}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(x-1+e^x\right)}{\cancel{x}e^x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1+e^x}{e^x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(x-1+e^x\right)\times\frac{1}{e^x}=-\infty\quad;\quad\left(\lim_{x\to-\infty}e^x=0^+\Rightarrow\begin{cases}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}=+\infty\\ \lim_{x\to-\infty}\left(x-1+e^x\right)=-\infty\end{cases}\right)$$

خلاصة : $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$

- نؤول هندسيا النتيجة .

- بما أن : $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ فإن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $-\infty$

خلاصة : المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $-\infty$.

.02 ..

أ- نتحقق من أن : $f(x)-x$ و x^2-x لهما نفس الإشارة لكل x من $\mathbb{R}$ . ... (0.25 ن)

لدينا : $f(x)-x=\left(\left(x^2-x\right)e^{-x}+x\right)-x=\left(x^2-x\right)e^{-x}$

نعلم أن : $e^{-x}>0$ لكل x من $\mathbb{R}$ و منه إشارة $f(x)-x$ هي إشارة x^2-x .

خلاصة : $f(x)-x$ و x^2-x لهما نفس الإشارة لكل x من $\mathbb{R}$.

ب- نستنتج أن : (C) يوجد فوق (D) على كل من المجالين $]-\infty,0]$ و $[1,+\infty[$ و تحت (D) على المجال $[0,1]$ . ... (0.5 ن)

لدينا : $x^2-x=x(x-1)$ و منه : الإشارة و الوضع النسبي ل (C) و (D) على $\mathbb{R}$ بواسطة الجدول التالي :

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f(x)-x$ و x^2-x لهما نفس الإشارة	$+$	0	$-$	0	$+$
الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (D)	(C) فوق (D)		(C) تحت (D)		(C) فوق (D)
		(C) و (D) يتقطعان في $x_0=0$		(C) و (D) يتقطعان في $x_1=1$	

خلاصة : الوضع النسبي للمنحى (C) و المستقيم (D) على $\mathbb{R}$ هي كالتالي :

- المنحنى (C) و المستقيم (D) يتقاطعان في نقطتين حيث زوج إحداثياتهما هي $(0,0)$ و $(1,1)$.
- المنحنى (C) يوجد فوق المستقيم (D) على كل من المجالين $]-\infty,0]$ و $[1,+\infty[$.
- المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (D) على المجال $[0,1]$.

03..

أ- نبين أن : لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x)=g(x)e^{-x}$ . ... (0.75 ن)

لدينا :

$$f'(x)=\left(\left(x^2-x\right)e^{-x}+x\right)'=\left(x^2-x\right)'\times e^{-x}+\left(x^2-x\right)\left(e^{-x}\right)'+(x)'$$
$$=(2x-1)\times e^{-x}+\left(x^2-x\right)\left(-e^{-x}\right)+1$$
$$=\left(2x-1-x^2+x\right)\times e^{-x}+e^x\times e^{-x} \quad ; \left(1=e^0=e^{x-x}=e^x\times e^{-x}\right)$$
$$=\left(-x^2+3x-1\right)\times e^{-x}+e^x\times e^{-x}$$
$$=\left(-x^2+3x-1+e^x\right)\times e^{-x}=g(x)e^{-x} \quad ; \left(g(x)=e^x-x^2+3x-1\right)$$

خلاصة : لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x)=g(x)e^{-x}$.

ب- نستنتج أن الدالة f تناقصية على $]-\infty,0]$ و تزايدية على $[0,+\infty[$ . ... (0.5 ن)

لدينا :

- ❖ لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x)=g(x)e^{-x}$ ومنه إشارة f' هي إشارة $g(x)$ لأن $e^{-x}>0$.
- ❖ حسب ما سبق :
- لكل x من $[0,+\infty[$ لدينا $g(x)\geq 0$ و منه الدالة المشتقة f' موجبة على $[0,+\infty[$ إذن الدالة f تزايدية على $[0,+\infty[$
- لكل x من $]-\infty,0]$ لدينا : $g(x)\leq 0$ و منه الدالة المشتقة f' سالبة على $]-\infty,0]$ إذن الدالة f تناقصية على $]-\infty,0]$

خلاصة : الدالة f تناقصية على $]-\infty,0]$ و تزايدية على $[0,+\infty[$.

ج- نضع جدول تغيرات الدالة f . ... (0.25 ن)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(0)=0$	↗ $+\infty$

04..

أ- نتحقق من أن : $f''(x)=\left(x^2-5x+4\right)e^{-x}$ لكل x من $\mathbb{R}$ . ... (0.25 ن)

لدينا :

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(g(x)e^{-x}\right)'$$
$$=g'(x)\times e^{-x}+g(x)\times\left(-e^{-x}\right)$$
$$=\left(g'(x)-g(x)\right)\times e^{-x}$$
$$=\left(\left(e^x-x^2+3x-1\right)'-\left(e^x-x^2+3x-1\right)\right)\times e^{-x}$$

$$=\left(\cancel{e^x}-2x+3-\cancel{e^x}+x^2-3x+1\right)\times e^{-x}=\left(x^2-5x+4\right)e^{-x}$$

خلاصة : $f''(x)=\left(x^2-5x+4\right)e^{-x}$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب- نستنتج أن المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما على التوالي هما 1 و 4 . ... (0.5 ن)

- ❖ لتحديد نقطتي انعطاف الدالة f ندرس إشارة f'' الدالة المشتقة الثانية ل f .
- ❖ إشارة f'' هي إشارة x^2-5x+4 لأن $e^{-x}>0$

لدينا : $x^2-5x+4=x^2-x-4x+4=x(x-1)-4(x-1)=(x-1)(x-4)$

- ❖ $(x-1)(x-4)=0\Leftrightarrow(x=1 \text{ ou } x=4)$

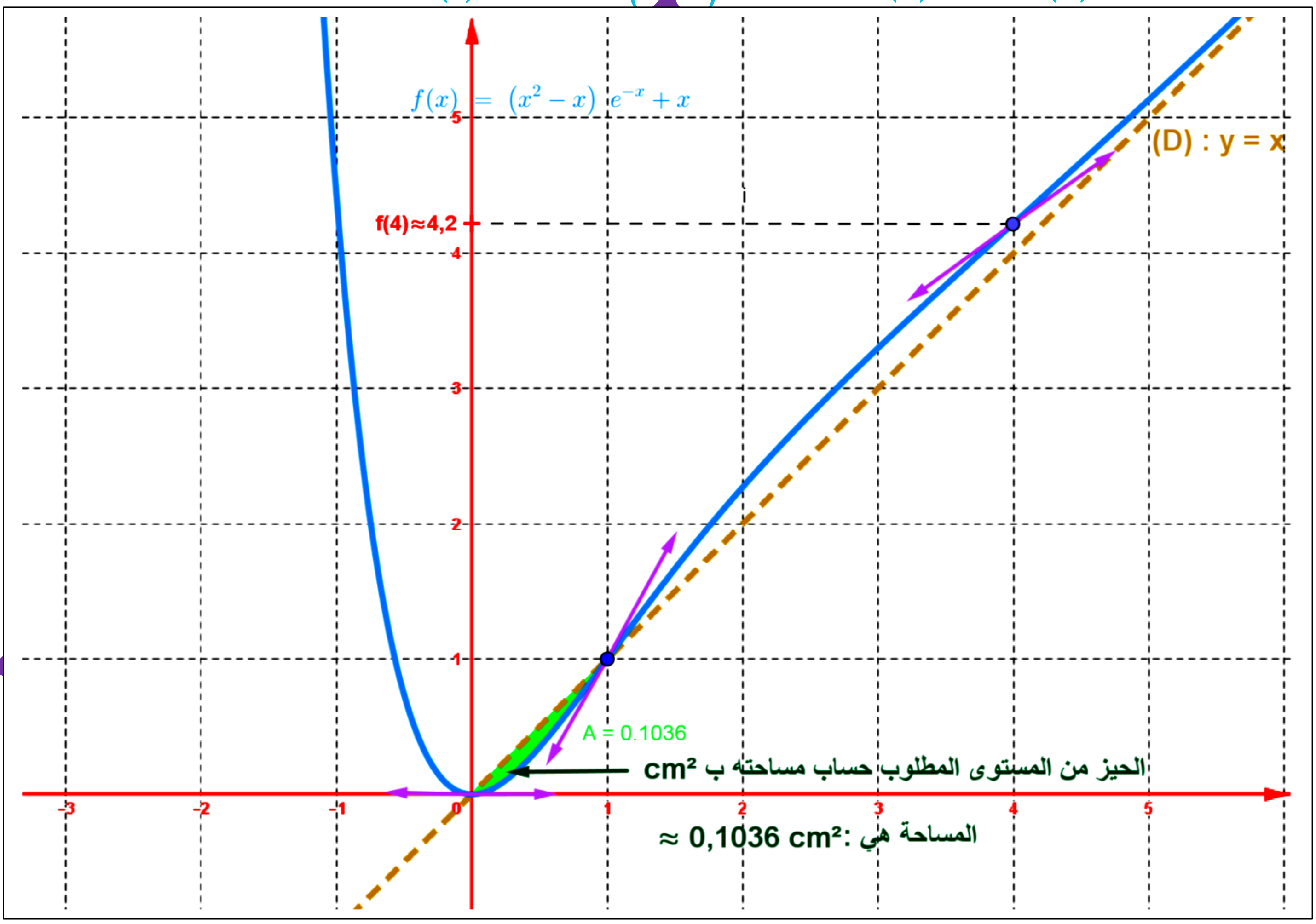
ومنه إشارة f'' بواسطة الجدول التالي :

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	0	+	

- ❖ من خلال الجدول :
  - ➢ الدالة المشتقة الثانية f'' تنعدم في 1 و تتغير إشارتها بجوار 1 إذن النقطة التي أفصولها 1 هي نقطة انعطاف .
  - ➢ الدالة المشتقة الثانية f'' تنعدم في 4 و تتغير إشارتها بجوار 4 إذن النقطة التي أفصولها 4 هي نقطة انعطاف .

خلاصة : أن المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما على التوالي هما 1 و 4 .

05. ننشئ المستقيم (D) و المنحنى (C) في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نأخذ $f(4)\simeq4,2$) . ... (1 ن)



..06

أ- نبين أن : الدالة $H\ :\ x\mapsto(x^2+2x+2)e^{-x}$ هي دالة أصلية للدالة $h\ :\ x\mapsto -x^2e^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

ثم استنتج أن : $\int_0^1 x^2e^{-x}dx=\frac{2e-5}{e}$ . ... (0.5 ن)

- نبين أن : الدالة $H\ :\ x\mapsto(x^2+2x+2)e^{-x}$ هي دالة أصلية للدالة $h\ :\ x\mapsto -x^2e^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

لهذا نبين أن : $H'(x)=h(x)$.

لدينا :

$$\begin{aligned}H'(x)&=\left(\left(x^2+2x+2\right)e^{-x}\right)'\\&=\left(x^2+2x+2\right)'e^{-x}+\left(x^2+2x+2\right)\left(e^{-x}\right)'\\&=(2x+2)e^{-x}+\left(x^2+2x+2\right)\left(-e^{-x}\right)\\&=\left(\cancel{2x}+\cancel{2}-x^2-\cancel{2x}-\cancel{2}\right)e^{-x}\\&=-x^2e^{-x}=h(x)\end{aligned}$$

و منه : $H'(x)=h(x)$

خلاصة : الدالة $H\ :\ x\mapsto(x^2+2x+2)e^{-x}$ هي دالة أصلية للدالة $h\ :\ x\mapsto -x^2e^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

- نستنتج أن : $\int_0^1 x^2e^{-x}dx=\frac{2e-5}{e}$

لدينا :

$$\int_0^1 x^2e^{-x}dx=\int_0^1 -h(x)dx=\left[-H(x)\right]_0^1=-H(1)+H(0)$$

$$=-\left(1^2+2\times1+2\right)e^{-1}+\left(0^2+2\times0+2\right)e^{0}=-5e^{-1}+2\times1=\frac{2e-5}{e}$$

خلاصة : $\boxed{\int_0^1 x^2e^{-x}dx=\frac{2e-5}{e}}$

ب- باستعمال المكاملة بالأجزاء نبين أن : $\int_0^1 xe^{-x}dx=\frac{e-2}{e}$ . ... (0.75 ن)

نضع :

$$\begin{array}{lll}u(x)=x & & u'(x)=1\\(1)\downarrow & (2)\searrow\quad - & \downarrow(3)\\v'(x)=e^{-x} & & v(x)=-e^{-x}\end{array}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{-x}dx&=\left[x\times\left(-e^{-x}\right)\right]_0^1-\int_0^1 -e^{-x}dx\\&=-\left(1\times e^{-1}-0\times e^{0}\right)-\left[e^{-x}\right]_0^1\\&=-e^{-1}-\left(e^{-1}-e^{0}\right)=-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+1=\frac{e-2}{e}\end{aligned}$$

خلاصة : $\int_0^1 xe^{-x}dx = \frac{e-2}{e}$

ج- نحسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$.
(0.75 ن) ....

المساحة المطلوبة هي :

$$\left(\int_1^2 |f(x)-x|dx\right)\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\| = \left(\int_1^2 (x-f(x))dx\right)\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|\ cm^2$$
(لأن (C) تحت (D) على $[0,1]$) ($f(x)\le x$ على $[0,1]$)

$$= \left(\int_0^1 \left(x-\left(\left(x^2-x\right)e^{-x}+x\right)\right)dx\right)\times 1\times 1\ cm^2$$
$$= \int_0^1 -\left(x^2-x\right)e^{-x}dx \quad cm^2$$
$$= \int_0^1 \left(-x^2e^{-x}+xe^{-x}\right)dx \quad cm^2$$
$$= -\int_0^1 x^2e^{-x}dx + \int_0^1 xe^{-x}dx \ cm^2$$
$$= -\frac{2e-5}{e}+\frac{e-2}{e} \quad cm^2$$
(لأن : $\int_0^1 xe^{-x}dx = \frac{e-2}{e}$ et $\int_0^1 x^2e^{-x}dx = \frac{2e-5}{e}$)
$$= \frac{3-e}{e} \quad cm^2$$

خلاصة : مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=2$ هي $\frac{3-e}{e}\ cm^2$.

III. لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$.

01. نبين بالترجع أن : $0 \le u_n \le 1$ لكل n من $\mathbb{N}$ . ... (0.75 ن)

- نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n=0$

لدينا : $0 \le u_0 = \frac{1}{2} \le 1$ و منه العلاقة صحيحة من أجل $n=0$.

- نفترض أن العلاقة صحيحة للرتبة n : أي $0 \le u_n \le 1$ (معطيات الترجع) .
- نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$: أي نبين أن : $0 \le u_{n+1} \le 1$

حسب معطيات الترجع لدينا : $0 \le u_n \le 1$.

و منه : $0 \le u_n \le 1 \Rightarrow f(0) \le f(u_n) \le f(1)$ (لأن f تزايدية على $[0,1]$ و $0 \le u_n \le 1$)

$\Rightarrow 0 \le u_{n+1} \le 1$ (لأن $f(0)=0$ و $\left(f(1)=\left(1^2-1\right)e^{-1}+1=1\right)$

أو أيضا $f(0)=0$ و $f(1)=1$ لأن (C) و (D) يتقطعان في نقطتين

حيث : زوج إحداثياتهما هي : $(0,0)$ و $(1,1)$).

و منه : العلاقة صحيحة ل $n+1$.

خلاصة : $0 \le u_n \le 1$ لكل n من $\mathbb{N}$.

02. نبين أن المتتالية (u_n) تناقصية (يمكن استعمال نتيجة السؤال II (3) ب-) .... (0.5 ن)

لهذا نبين أن : $u_{n+1}-u_n \le 0$ لكل n من $\mathbb{N}$.

لكل n من $\mathbb{N}$ نضع $x=u_n$ و لدينا : $0\le u_n \le 1$ أي $u_n \in [0,1]$

حسب نتيجة السؤال II (3) ب-): (C) تحت (D) على $[0,1]$ إذن : لكل x من $[0,1]$ فإن $f(x)\le x$.

أي $x\in[0,1]\Rightarrow f(x)\le x$:

$$\Rightarrow f(u_n)\le u_n \quad ; (u_n = x \text{ et } 0\le u_n\le 1)$$
$$\Rightarrow u_{n+1}\le u_n \quad ; \left(u_{n+1}=f(u_n)\right)$$
$$\Rightarrow u_{n+1}-u_n\le 0$$

و بالتالي : لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا $u_{n+1}\le u_n$ (أو أيضا $u_{n+1}-u_n\le 0$)

خلاصة : المتتالية (u_n) تناقصية .

03. نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و نحدد نهايتها . ... (0.75 ن)

❖ نستنتج أن : المتتالية (u_n) متقاربة

لدينا :

✓ المتتالية (u_n) تناقصية .

✓ المتتالية (u_n) مصغورة (لأن $0\le u_n\le 1$)

إذن حسب خاصية : المتتالية (u_n) متقاربة مع نهايتها ℓ حيث $\ell\in\mathbb{R}$

خلاصة : (u_n) متقاربة

❖ نحدد نهاية المتتالية (u_n) :

- المتتالية تكتب على شكل $u_{n+1}=f(u_n)$
- الدالة f متصلة على $I=[0,1]$
- $f(I)\subset I=[0,1]$ لأن : $0\le x\le 1\Rightarrow f(0)\le f(x)\le f(1)$ (لأن f تزايدية على $[0,1]$)

$$\Rightarrow 0\le f(x)\le 1 \quad (\text{ لأن } f(0)=0 \text{ و } f(1)=1)$$
$$\Rightarrow f(x)\in[0,1]$$
$$\Rightarrow f(I)\subset I=[0,1]$$

- بما أن (u_n) متقاربة إذن نهايتها ℓ هي حل للمعادلة $f(x)=x \; ; \; x\in I=[0,1]$ (حسب خاصية) .

أي حل للمعادلة $f(x)-x=0 \; ; \; x\in I=[0,1]$

✓ أي ندرس تقاطع المنحنى (C) و المستقيم (D) على $[0,1]$ و حسب ما سبق المنحنى (C) و المستقيم (D) يتقاطعان في نقطتين حيث زوج إحداثياتهما هي $(0,0)$ و $(1,1)$. إذن هناك حلين هما 0 و 1

✓ المتتالية (u_n) تناقصية إذن $u_0\ge u_1\ge u_2 ....\ge u_n$ و منه $u_0=\frac{1}{2}\ge u_n$ أي $u_n\le\frac{1}{2}<1$ ومنه الحل المقبول هو $\ell=0$

خلاصة : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$