Exercice 01 : 4,5 points

Soit la suite Un définie par : $U_0 = 2 \;\; et \; U_{n+1} = \frac{2u_n - 9}{u_n - 4}$ $\forall n \in IN$

1) Calculer $U_1 \; et \; U_2$.
2) a- Montrer par Récurrence que pour tout $n \; de \; IN$: 3-$U_n > 0$.

   b-Montrer que pour tout $n \; de \; IN$: $U_{n+1} - U_n = \frac{(u_n-3)^2}{4-u_n}$

   c- En déduire que (U_n) est une suite croissante.

   d- En déduire que (U_n) est convergente.
3) On suppose que : $V_n = \frac{1}{u_n - 3}$ $\forall n \in IN$

   a. Calculer V_0.

   Prof : SABBAR AMINE

   b. Montre que pour tout $n \; de \; IN \; V_{n+1} = \frac{4-u_n}{u_n-3}$

   c. Montrer que $V_{n+1} - V_n = -1$ et en déduire que $V_n = -1 - n$
4) a- Montrer que $U_n = \frac{1+3V_n}{V_n}$

   b- En déduire que $U_n = \frac{3n+2}{n+1}$ $pour \; tout \; n \; de \; IN$ puis Calculer la limite de u_n en $+\infty$.

Exercice 02 : 11 points

Partie I :

On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie sur IR par : $g(x) = e^x - x$

1) Calculer $g'(x)$ pour tout x de IR.
2) Montrer que $g'(x) < 0 \; \forall \; x \; de \;]-\infty, 0]$ et $'(x) > 0 \; \forall \; x \; de \; [0, +\infty[$.

   Puis dresser le tableau de variation de g
3) en déduire que $e^x - x > 0$ pour tout x de IR.

Partie II :

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que l'ensemble de définition de f est $D_f = IR$
2) a-Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et donner une interprétation géométrique.