الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2019
- الموضوع -
RS22

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

| | | | |
|---|---|---|---|
| المادة | الرياضيات | مدة الانجاز | 3 |
| الشعبة أو المسلك | شعبة العلوم التجريبية بمسالكها | المعامل | 7 |

## تعليمات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة .

## مكونات الموضوع

يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين و مسألة، مستقلة فيما بينها، و تتوزع حسب المجالات كما يلي:

| | | |
|---|---|---|
| التمرين الأول | الهندسة الفضائية | 3 نقط |
| التمرين الثاني | الأعداد العقدية | 3 نقط |
| التمرين الثالث | حساب الاحتمالات | 3 نقط |
| المسألة | دراسة دالة عددية و حساب التكامل و المتتاليات العددية | 11 نقطة |

**التمرين الأول ( 3 نقط ):**

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط $A(1,2,2)$ و $B(3,-1,6)$ و $C(1,1,3)$

0.75 | 1) أ) تحقق أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$

0.5 | ب) استنتج أن $x-2y-2z+7=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى $(ABC)$

0.75 | 2) نعتبر النقطتين $E(5,1,4)$ و $F(-1,1,12)$ و $(S)$ مجموعة النقط $M$ التي تحقق $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF}=0$
بين أن المجموعة $(S)$ فلكة مركزها هو النقطة $\Omega(2,1,8)$ و شعاعها $R=5$

0.5 | 3) أ) أحسب $d(\Omega,(ABC))$ مسافة النقطة $\Omega$ عن المستوى $(ABC)$

0.5 | ب) استنتج أن المستوى $(ABC)$ يقطع الفلكة $(S)$ وفق دائرة $(\Gamma)$ شعاعها $r=4$

**التمرين الثاني (3 نقط ) :**

0.75 | 1) أ) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-3z+3=0$

0.5 | ب) نضع $a=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، أكتب $a$ على الشكل المثلثي

0.5 | 2) نعتبر العدد العقدي $b=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ ، تحقق أن $b^2=i$

0.5 | 3) نضع $h=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$ ، بين أن $h^4+1=a$

4) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقطة $B$ التي لحقها $b$ و $R$ الدوران الذي مركزه $O$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

0.5 | أ) ليكن $c$ لحق النقطة $C$ صورة النقطة $B$ بالدوران $R$ ، بين أن $c=ib$

0.25 | ب) استنتج طبيعة المثلث $OBC$

**التمرين الثالث ( 3 نقط ) :**

يحتوي صندوق على كرة واحدة حمراء و كرتين بيضاوين و ثلاث كرات سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس
نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال 3 كرات من الصندوق .

لتكن الأحداث التالية : $A$ : "الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون "

و $B$ : "لا توجد أي كرة بيضاء من بين الكرات المسحوبة "

و $C$ : " توجد كرتان بيضاوان بالضبط من بين الكرات المسحوبة "

2 | 1) بين أن : $p(A)=\frac{1}{6}$ و $p(B)=\frac{8}{27}$

1 | 2) أحسب $p(C)$

المسألة ( 11 نقطة ) :

**الجزء الأول :**

لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $IR^*$ كما يلي : $f(x)=2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$

و $(C)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة 1cm)

| | |
|---|---|
| 1) أ) تحقق أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ و أول النتيجة هندسيا | 0.5 |
| ب) تحقق أن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ و أول النتيجة هندسيا | 0.5 |
| 2) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ | 0.5 |
| ب) بين أن المنحنى $(C)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المقارب محور الأراتيب بجوار $+\infty$ | 0.5 |
| 3) أ) بين أن لكل $x$ من $IR^*$ ، $f'(x)=\frac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^3}$ | 0.75 |
| ب) تحقق أن لكل $x$ من $IR$ ، $x^2-2x+4>0$ | 0.25 |
| ج) بين أن $f$ تناقصية قطعا على المجال $]0,2]$ و تزايدية قطعا على كل من المجالين $]-\infty,0[$ و $[2,+\infty[$ | 0.75 |
| د) ضع جدول تغيرات الدالة $f$ على $IR^*$ | 0.5 |
| 4) أنشئ المنحنى $(C)$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ | 1 |
| 5) أ) تحقق أن الدالة $H:x\mapsto \frac{1}{x}e^{x-4}$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto \frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ على المجال $[2,4]$ | 0.5 |
| ب) تحقق أن $f(x)=2+8e^{x-4}-32\frac{(x-1)}{x^2}e^{x-4}$ | 0.25 |
| ج) أحسب التكامل $\int_2^4 e^{x-4}dx$ | 0.5 |
| د) احسب ب $cm^2$ مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(C)$ و محور الأفاصيل والمستقيمين الذين معادلتاهما $x=2$ و $x=4$ | 0.75 |

**الجزء الثاني :**

| | |
|---|---|
| 1) نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة على المجال $[2,4]$ بما يلي : $g(x)=8(x-2)e^{x-4}-x^2$ | |
| أ) أحسب $g(4)$ | 0.25 |
| ب) تحقق أن لكل $x$ من المجال $[2,4]$ ، $g(x)=-(x-4)^2e^{x-4}+x^2(e^{x-4}-1)$ | 0.5 |
| ج) تحقق أن لكل $x$ من المجال $[2,4]$ : $e^{x-4}-1\le 0$ ثم استنتج أن لكل $x$ من المجال $[2,4]$ : $g(x)\le 0$ | 0.5 |
| 2) أ) تحقق أن لكل $x$ من المجال $[2,4]$ ، $f(x)-x=\left(\frac{x-2}{x^2}\right)g(x)$ | 0.5 |
| ب) استنتج أن لكل $x$ من المجال $[2,4]$ ، $f(x)\le x$ | 0.25 |
| 3) لتكن $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0=3$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل $n$ من $IN$ | |
| أ) بين بالترجع أن لكل $n$ من $IN$ $2\le u_n\le 4$ | 0.5 |
| ب) حدد رتابة المتتالية $(u_n)$ ، ثم استنتج أنها متقاربة | 0.5 |
| ج) أحسب نهاية المتتالية $(u_n)$ | 0.75 |

# تصحيح وطني 2019

## الدورة الاستدراكية - علوم تجريبية

**التمرين الأول ( 3 نقاط ) :**

| | |
|---|---|
| في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط $A(1,2,2)$ و $B(3,-1,6)$ و $C(1,1,3)$ | |
| **1)** أ) تحقق أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$ | 0.75 |
| ب) استنتج أن $x-2y-2z+7=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى $(ABC)$ | 0.5 |
| **2)** نعتبر النقطتين $E(5,1,4)$ و $F(-1,1,12)$ و $(S)$ مجموعة النقط $M$ التي تحقق $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF}=0$ بين أن المجموعة $(S)$ فلكة مركزها هو النقطة $\Omega(2,1,8)$ و شعاعها $R=5$ | 0.75 |
| **3)** أ) أحسب $d(\Omega,(ABC))$ مسافة النقطة $\Omega$ عن المستوى $(ABC)$ | 0.5 |
| ب) استنتج أن المستوى $ABC$ يقطع الفلكة $(S)$ وفق دائرة $(\Gamma)$ شعاعها $r=4$ | 0.5 |

**التمرين الثاني ( 3 نقاط ) :**

| | |
|---|---|
| **1)** أ) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-3z+3=0$ | 0.75 |
| ب) نضع $a=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، أكتب $a$ على الشكل المثلثي | 0.5 |
| **2)** نعتبر العدد العقدي $b=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ ، تحقق أن $b^2=i$ | 0.5 |
| **3)** نضع $h=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$ ، بين أن $h^4+1=a$ | 0.5 |
| **4)** في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقطة $B$ التي لحقها $b$ و $R$ الدوران الذي مركزه $O$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ | |
| أ) ليكن $c$ لحق النقطة $C$ صورة النقطة $B$ بالدوران $R$ ، بين أن $c=ib$ | 0.5 |
| ب) استنتج طبيعة المثلث $OBC$ | 0.25 |

**التمرين الثالث ( 3 نقاط ) :**

| | |
|---|---|
| يحتوي صندوق على كرة واحدة حمراء و كرتين بيضاوين و ثلاث كرات سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال 3 كرات من الصندوق . لتكن الأحداث التالية : $A$ " الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون " و $B$ " لا توجد أي كرة بيضاء من بين الكرات المسحوبة " و $C$ " توجد كرتان بيضاوان بالضبط من بين الكرات المسحوبة " | |
| **1)** بين أن : $p(A)=\frac{1}{6}$ و $p(B)=\frac{8}{27}$ | 2 |

| | |
|---|---|
| **2)** أحسب $p(C)$ | 1 |

**المسألة ( 11 نقطة ) :**

| | |
|---|---|
| <u>الجزء الأول:</u> | |
| لتكن $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=2+8(\frac{x-2}{x})^2e^{x-4}$ | |
| و $(C)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $1cm$) | |
| **1)** أ) تحقق أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ و أول النتيجة هندسيا | 0.5 |
| ب) تحقق أن $\lim\limits_{x\to0} f(x)=+\infty$ و أول النتيجة هندسيا | 0.5 |
| **2)** أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ | 0.5 |
| ب) بين أن المنحنى $(C)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المقارب محور الأراتيب بجوار $+\infty$ | 0.5 |
| **3)** أ) بين أن لكل $x$ من $\mathbb{R}^*$ ، $f'(x)=\frac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^3}$ | 0.75 |
| ب) تحقق أن لكل $x$ من $\mathbb{R}$ ، $x^2-2x+4>0$ | 0.25 |
| ج) بين أن $f$ تناقصية قطعا على المجال $]0,2]$ و تزايدية قطعا على كل من المجالين $]-\infty,0[$ و $[2,+\infty[$ | 0.75 |
| د) ضع جدول تغيرات الدالة $f$ على $\mathbb{R}^*$ | 0.5 |
| **4)** أنشئ المنحنى $(C)$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ | 1 |
| **5)** أ) تحقق أن الدالة $H:x\mapsto\frac{1}{x}e^{x-4}$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto\frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ على المجال $[2,4]$ | 0.5 |
| ب) تحقق من أن $f(x)=2+8e^{x-4}-32\frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ | 0.25 |
| ج) أحسب التكامل $\int_2^4 e^{x-4}dx$ | 0.5 |
| د) أحسب ب $cm^2$ مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(C)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=2$ و $x=4$ | 0.75 |
| <u>الجزء الثاني:</u> | |
| **1)** نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة على المجال $[2,4]$ بما يلي : $g(x)=8(x-2)e^{x-4}-x^2$ | |
| أ) أحسب $g(4)$ | 0.25 |
| ب) تحقق أن لكل $x$ من المجال $[2,4]$ ، $g(x)=-(x-4)^2e^{x-4}+x^2(e^{x-4}-1)$ | 0.5 |
| ج) تحقق أن لكل $x$ من المجال $[2,4]$ ، $e^{x-4}-1\leq0$ ثم استنتج أن لكل $x$ من المجال $[2,4]$ : $g(x)\leq0$ | 0.5 |
| **2)** أ) تحقق أن لكل $x$ من المجال $[2,4]$ ، $f(x)-x=\left(\frac{x-2}{x^2}\right)g(x)$ | 0.5 |
| ب) استنتج أن لكل $x$ من المجال $[2,4]$ ، $f(x)\leq x$ | 0.25 |

| | |
|---|---|
| **3)** لتكن $u_n$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = f \; u_n$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$ | |
| أ) بين بالترجع أن لكل $n$ من $\mathbb{N}$ $2 \leq u_n \leq 4$ | 0.5 |
| ب) حدد رتابة المتتالية $u_n$ ، ثم استنتج أنها متقاربة | 0.5 |
| ج) أحسب نهاية المتتالية $u_n$ | 0.75 |

## تصحيح التمرين الأول

1) أ) لدينا $\overrightarrow{AB} \; 2,-3,4$ و $\overrightarrow{AC} \; 0,-1,1$

إذن :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix}-3 & 4\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}2 & 4\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}2 & -3\\ 0 & -1\end{vmatrix}\vec{k} \\ &= 1.\vec{i} - 2.\vec{j} - 2.\vec{k}\end{aligned}$$

و بالتالي : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$

ب) لدينا : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \; 1,-2,-2$ متجهة منظمية للمستوى $ABC$

إذن معادلة ديكارتية للمستوى $ABC$ تكتب على شكل : $1.x - 2.y - 2.z + d = 0$

و لدينا : $A \; 1,2,2 \in ABC$

إذن : $1. \; 1 \; - 2. \; 2 \; - 2. \; 2 \; + d = 0$

و منه : $d = 7$

نستنتج أن $x - 2y - 2z + 7 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى $ABC$

2) لدينا $S$ مجموعة النقط $M$ التي تحقق $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} = 0$

إذن $S$ هي الفلكة التي أحد أقطارها $EF$

و بالتالي : $\Omega$ مركز الفلكة هو منتصف القطعة $EF$ و شعاعها $R$ : $R = \dfrac{EF}{2}$

$$\begin{cases} x_\Omega = \dfrac{x_E + x_F}{2} = \dfrac{5+(-1)}{2} = 2 \\ y_\Omega = \dfrac{y_E + y_F}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1 \\ z_\Omega = \dfrac{z_E + z_F}{2} = \dfrac{4+12}{2} = 8 \end{cases}$$

و $R=\frac{EF}{2}=\frac{\sqrt{(-1-5)^2+(1-1)^2+(12-4)^2}}{2}=\frac{\sqrt{36+0+64}}{2}=\frac{10}{2}=5$

و منه : المجموعة $S$ فلكة مركزها هو النقطة $\Omega(2,1,8)$ و شعاعها $R=5$

**3)** أ) $d(\Omega,(ABC))=\frac{|2-2(1)-2(8)+7|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=\frac{9}{\sqrt{9}}=3$

ب) بما أن $d(\Omega,(ABC))<R$ فإن المستوى $(ABC)$ يقطع الفلكة $S$ وفق دائرة $\Gamma$ شعاعها $r$

حيث : $r=\sqrt{R^2-(d(\Omega,(ABC)))^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

## تصحيح التمرين الثاني

**1)** أ) لنحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-3z+3=0$

لدينا : $\Delta=(-3)^2-4(1)(3)=-3$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين

$z=\frac{-(-3)-i\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ أو $z=\frac{-(-3)+i\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

و منه : $S=\left\{\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

ب) لدينا : $a=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

معيار العدد $a$ هو : $|a|=\left|\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$

لنكتب العدد $a$ على الشكل المثلثي:

$$a=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

**2)** $$b^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(1+i)^2=\frac{2}{4}(1+2i-1)=\frac{4i}{4}=i$$

**3)** حسب علاقة موافر :

$$h^4=\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^4=\cos\frac{4\pi}{12}+i\sin\frac{4\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

إذن : $h^4+1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=a$

**4)** أ) لدينا : $\frac{\pi}{2}$ : $C\ c$ صورة النقطة $B\ b$ بالدوران $R$ الذي مركزه $O$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

إذن :

$$\begin{aligned} c-0 &= e^{i\frac{\pi}{2}}\ b-0 \\ c &= \left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right).b \end{aligned}$$

و منه : $c=ib$

ب) لدينا : $R\ B\ =C \Leftrightarrow \begin{cases} OB=OC \\ \overline{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}} \equiv \frac{\pi}{2}\ 2\pi \end{cases}$

إذن المثلث $OBC$ متساوي الساقين و قائم الزاوية في $O$

## تصحيح التمرين الثالث

التجربة " نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال 3 كرات من الصندوق ."

ليكن $\Omega$ كون إمكانيات التجربة

لدينا : $card\Omega=6^3=216$

1) $A$ " الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون "

$BBB$ أو $NNN$ أو $RRR$

$$cardA=1^3+2^3+3^3=36$$

$$p\ A\ =\frac{cardA}{card\Omega}=\frac{36}{216}=\frac{1}{6}$$

$B$ " لا توجد أي كرة بيضاء من بين الكرات المسحوبة "

$\overline{B}\overline{B}\overline{B}$

$$cardB=4^3=64$$

$$p\ B\ =\frac{cardB}{card\Omega}=\frac{64}{216}=\frac{8}{27}$$

2) $C$ " توجد كرتان بيضاوان بالضبط من بين الكرات المسحوبة "

$$\begin{cases} BB\overline{B} \\ B\overline{B}B \\ \overline{B}BB \end{cases}$$

$$cardC=\frac{3!}{2!\times1!}\left(2^2\times4^1\right)=48$$

$$p(C)=\frac{cardC}{card\Omega}=\frac{48}{216}=\frac{2}{9}$$

## تصحيح المسألة

<u>الجزء الأول:</u>

**1)** أ)

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2e^{x-4}\right)=2$$

لأن :

$$\begin{cases} \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1 \\ \lim_{x\to-\infty}e^{x-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^4}=0 \qquad \lim_{x\to-\infty}e^x=0 \end{cases}$$

التأويل الهندسي: المنحنى $(C)$ يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y=2$ بجوار $-\infty$

ب)

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2e^{x-4}\right)=+\infty$$

لأن :

$$\begin{cases} \lim_{x\to0}\left(\frac{x-2}{x}\right)^2=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-2)^2}{x^2}=+\infty \qquad \begin{cases}\lim_{x\to0}(x-2)^2=4 \\ \lim_{x\to0}x^2=0^+\end{cases} \\ \lim_{x\to0}e^{x-4}=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{e^4}=\frac{1}{e^4} \end{cases}$$

التأويل الهندسي: المنحنى $(C)$ يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=0$

**2)** أ)

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2e^{x-4}\right)=+\infty$$

لأن :

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1 \\ \lim_{x\to+\infty}e^{x-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^4}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty \end{cases}$$

ب)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2\frac{e^{x-4}}{x}\right)=+\infty$$

لأن :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-2}{x}=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x-4}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^4}\dfrac{e^x}{x}=+\infty \quad \left(\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}=+\infty\right) \end{cases}$$

التأويل الهندسي:

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

فإن : المنحنى $(C)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المقارب محور الأراتيب بجوار $+\infty$

**3)** أ) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$

ليكن $x\in\mathbb{R}^*$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}\right)' \\ &= 0+8\left(\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}\right)' \\ &= 8\left(\left(\left(\frac{x-2}{x}\right)^2\right)' e^{x-4}+\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 \left(e^{x-4}\right)'\right) \\ &= 8\left(2\left(\frac{x-2}{x}\right)'\left(\frac{x-2}{x}\right)e^{x-4}+\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 (x-4)'e^{x-4}\right) \\ &= 8\left(2\times\frac{2}{x^2}\left(\frac{x-2}{x}\right)e^{x-4}+\frac{(x-2)^2}{x^2}e^{x-4}\right) \\ &= \frac{8(x-2)}{x^2}e^{x-4}\left(\frac{4}{x}+x-2\right) \\ &= \frac{8(x-2)}{x^2}e^{x-4}\left(\frac{4+x^2-2x}{x}\right) \end{aligned}$$

و منه لكل $x$ من $\mathbb{R}^*$ ، $f'(x)=\dfrac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^3}$

ب) ليكن $x\in\mathbb{R}$

لدينا : $x^2-2x+4=x^2-2x+1+3=(x-1)^2+3$

إذن من الواضح أن : لكل $x$ من $\mathbb{R}$ ، $x^2-2x+4>0$

ج) ليكن $x \in \mathbb{R}^*$ :

لدينا $f' \; x \; = \dfrac{8 \;\; x-2 \quad x^2-2x+4 \;\; e^{x-4}}{x^3} = \dfrac{8 \;\; x^2-2x+4 \;\; e^{x-4}}{x^2} \times \dfrac{x-2}{x}$

بما أن : $\dfrac{8 \;\; x^2-2x+4 \;\; e^{x-4}}{x^2} > 0$ فإن إشارة $f' \; x$ هي إشارة $\dfrac{x-2}{x}$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $\frac{x-2}{x}$ | $+$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ |

✓ على المجال $0,2$ : لدينا $f' \; x \le 0$ و $x=2 \;\Leftrightarrow\; f' \; x \; = 0$

إذن $f$ تناقصية قطعا

✓ على المجال $2,+\infty$ : لدينا $f' \; x \ge 0$ و $x=2 \;\Leftrightarrow\; f' \; x \; = 0$

إذن $f$ تزايدية قطعا

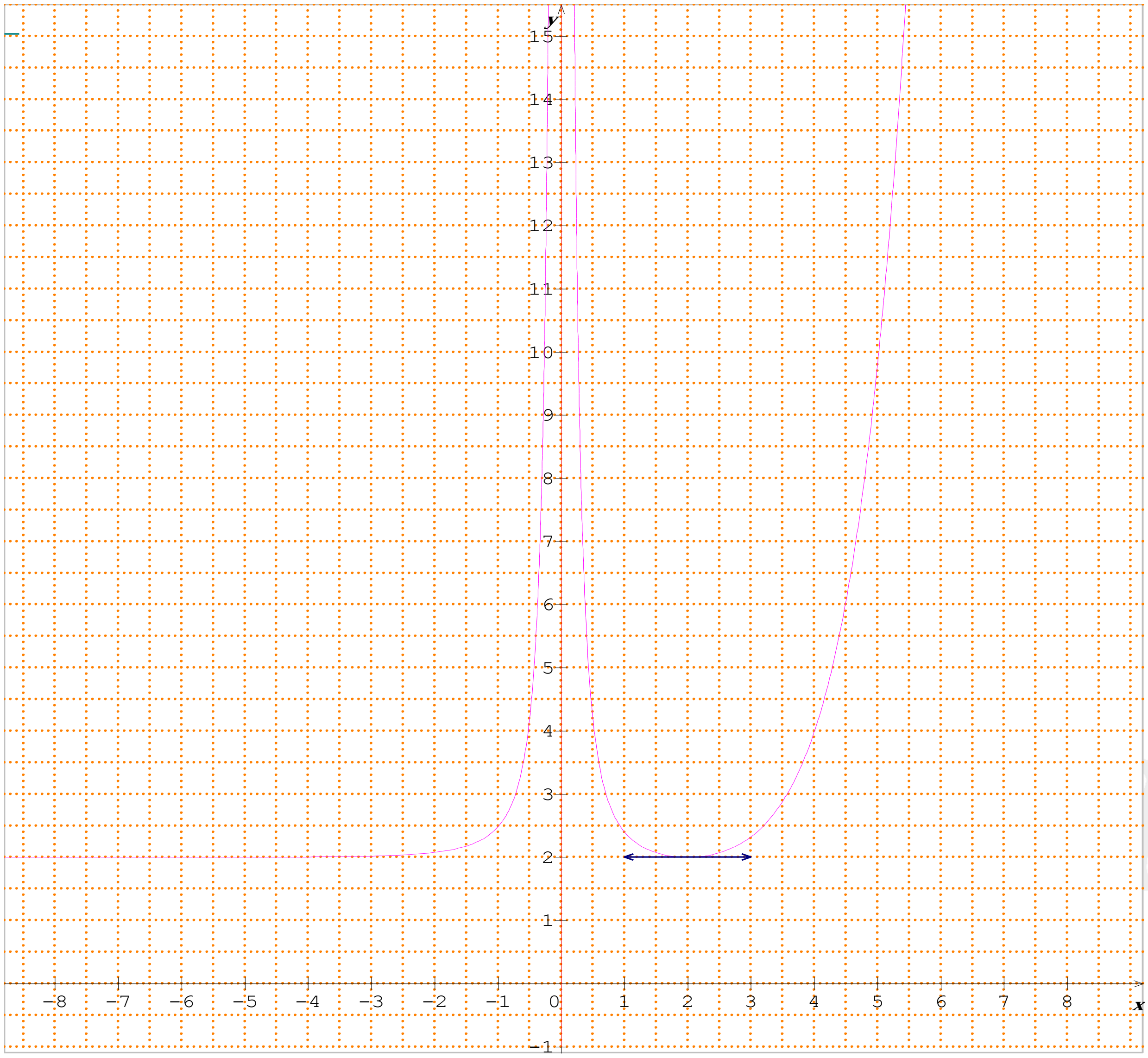
✓ على المجال $-\infty,0$ : لدينا $f' \; x > 0$

إذن $f$ تزايدية قطعا

د) جدول تغيرات الدالة $f$ على $\mathbb{R}^*$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $2$ | $\nearrow$ | $+\infty \,\|\|\, +\infty$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**4)**




**5)** أ)

✓ الدالة $H : x \mapsto \frac{1}{x}e^{x-4}$ قابلة للاشتقاق على المجال $2,4$ كجداء دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $2,4$

✓ ليكن $x \in 2,4$

لدينا

$$\begin{aligned}
H'(x) &= \left(\frac{1}{x}e^{x-4}\right)' \\
&= \left(\frac{1}{x}\right)' e^{x-4}+\frac{1}{x}\left(e^{x-4}\right)' \\
&= \frac{-1}{x^2}e^{x-4}+\frac{1}{x}(x-4)'e^{x-4} \\
&= \frac{-1}{x^2}e^{x-4}+\frac{1}{x}e^{x-4} \\
&= \left(\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)e^{x-4} \\
&= \left(\frac{x-1}{x^2}\right)e^{x-4}
\end{aligned}$$

إذن $\forall x\in[2,4]\quad H'(x)=h(x)$

وبالتالي : الدالة $H:x\mapsto \frac{1}{x}e^{x-4}$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto \frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ على المجال $[2,4]$

ب)

$$\begin{aligned}
2+8e^{x-4}-32\frac{x-1}{x^2}e^{x-4} &= 2+8e^{x-4}\left(1-4\frac{x-1}{x^2}\right) \\
&= 2+8e^{x-4}\left(\frac{x^2-4x+4}{x^2}\right) \\
&= 2+8e^{x-4}\left(\frac{(x-2)^2}{x^2}\right) \\
&= 2+8e^{x-4}\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

ج)

$$\begin{aligned}
\int_2^4 e^{x-4}dx &= \int_2^4 (x-4)'e^{x-4}dx \\
&= \left[e^{x-4}\right]_2^4 \\
&= e^0-e^{-2} \\
&= 1-\frac{1}{e^2} \\
&= \frac{e^2-1}{e^2}
\end{aligned}$$

د)

$$\begin{aligned}
A &= \int_2^4 \left| f\ \ x \right| dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \\
&= \int_2^4 f\ \ x\ \ dx \times 1cm \times 1cm \qquad \forall x \in\ 2;4 \quad f\ \ x\ \geq 0 \\
&= \int_2^4 \left(2 + 8e^{x-4} - 32\frac{x-1}{x^2}e^{x-4}\right) dx.\mathrm{cm}^2 \\
&= \left(\int_2^4 2dx + 8\int_2^4 e^{x-4}dx - 32\int_2^4 \frac{x-1}{x^2}e^{x-4}dx\right).cm^2 \\
&= \left(\ 2x\ {}_2^4 + 8\frac{e^2-1}{e^2} - 32\left[H\ \ x\ \right]_2^4\right).cm^2 \\
&= \left(\ 8-4\ \ + 8\frac{e^2-1}{e^2} - 32\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2e^2}\right)\right).cm^2 \\
&= \left(4 + 8\frac{e^2-1}{e^2} - 8 + \frac{16}{e^2}\right).cm^2 \\
&= \left(-4 + 8\frac{e^2-1}{e^2} + \frac{16}{e^2}\right).cm^2 \\
&= \left(\frac{-4e^2 + 8e^2 - 8 + 16}{e^2}\right).cm^2 \\
&= \frac{4e^2+8}{e^2}.cm^2
\end{aligned}$$

<u>الجزء الثاني:</u>

1) أ)

$$\begin{aligned}
g\ \ 4 &= 8\times 2e^0 -\ \ 4\ ^2 \\
&= 16-16 \\
&= 0
\end{aligned}$$

ب)

ليكن $x \in\ 2,4$

لدينا :

$$\begin{aligned}
-\ \ x-4\ ^2 e^{x-4} + x^2\ \ e^{x-4} - 1 &= -x^2 + 8x - 16\ \ e^{x-4} + x^2e^{x-4} - x^2 \\
&= -x^2 + 8x - 16 + x^2\ \ e^{x-4} - x^2 \\
&= 8\ \ x-2\ \ e^{x-4} - x^2 \\
&= g\ \ x
\end{aligned}$$

إذن : لكل $x$ من المجال $2,4$ ، $g\ \ x\ = -\ \ x-4\ ^{2} e^{x-4} + x^{2}\ \ e^{x-4}-1$

ج)

ليكن $x \in\ 2,4$

✓ لدينا $2 \leq x \leq 4$

إذن $-2 \leq x-4 \leq 0$

إذن $e^{x-4} \leq e^{0}$

إذن $e^{x-4} \leq 1$

و منه لكل $x$ من المجال $2,4$ ، $e^{x-4}-1 \leq 0$

✓ لدينا $g\ \ x\ = -\ \ x-4\ ^{2} e^{x-4} + x^{2}\ \ e^{x-4}-1$

بما أن $-\ \ x-4\ ^{2} e^{x-4} \leq 0$ و $x^{2}\ \ e^{x-4}-1\ \leq 0$

فإن $-\ \ x-4\ ^{2} e^{x-4} + x^{2}\ \ e^{x-4}-1\ \leq 0$

و منه لكل $x$ من المجال $2,4$ : $g\ \ x\ \leq 0$

2) أ) ليكن $x \in\ 2,4$

لدينا

$$\begin{aligned} f\ \ x\ -x &= 2+8\frac{x-2\ ^{2}}{x^{2}} e^{x-4} - x \\ &= 8\frac{x-2\ ^{2}}{x^{2}} e^{x-4} -\ \ x-2 \\ &= \frac{x-2}{x^{2}}\ 8\ \ x-2\ \ e^{x-4} - x^{2} \\ &= \frac{x-2}{x^{2}} g\ \ x \end{aligned}$$

إذن لكل $x$ من المجال $2,4$ ، $f\ \ x\ - x = \left(\frac{x-2}{x^{2}}\right) g\ \ x$

ب) ليكن $x \in\ 2,4$

لدينا $f\ \ x\ - x = \left(\frac{x-2}{x^{2}}\right) g\ \ x$

نعلم أن $x^{2} > 0$ و $x-2 \geq 0$ و $g\ \ x\ \leq 0$

إذن $\left(\frac{x-2}{x^{2}}\right) g\ \ x\ \leq 0$

إذن $f\ \ x\ - x \leq 0$

و منه لكل $x$ من المجال $[2,4]$ ، $f(x)\leq x$

3) أ) لنبين بالترجع أن لكل $n$ من $\mathbb{N}$ $2\leq u_n\leq 4$

- ✓ من أجل $n=0$ :
  لدينا $u_0=3$
  إذن $2\leq u_0\leq 4$
- ✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$
  - ▷ نفترض أن : $2\leq u_n\leq 4$
  - ▷ و نبين أن : $2\leq u_{n+1}\leq 4$

  حسب الافتراض لدينا $2\leq u_n\leq 4$
  و بما أن $f$ متصلة و تزايدية على المجال $[2,4]$
  فإن $f(2)\leq f(u_n)\leq f(4)$
  إذن $2\leq u_{n+1}\leq 4$
- ✓ نستنتج : أن لكل $n$ من $\mathbb{N}$ $2\leq u_n\leq 4$

ب)

- ✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$
  نعلم أن لكل $x$ من المجال $[2,4]$ ، $f(x)\leq x$
  و بما أن $2\leq u_n\leq 4$ فإن $f(u_n)\leq u_n$
  إذن لكل $n$ من $\mathbb{N}$ : $u_{n+1}\leq u_n$
  و منه المتتالية $(u_n)$ تناقصية
- ✓ بما أن $(u_n)$ تناقصية و مصغورة بالعدد 2 فإن $(u_n)$ متقاربة

ج) لدينا $u_0=3\in[2;4]$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$

- ✓ $f$ متصلة على المجال $[2,4]$
- ✓ $f([2,4])=[f(2);f(4)]=[2;4]$
- ✓ $(u_n)$ متقاربة

إذن نهاية المتتالية $(u_n)$ هي حل للمعادلة $f(x)=x$

$$\begin{aligned} f(x)=x &\Leftrightarrow (x-2)g(x)=0\\ &\Leftrightarrow x-2=0 \text{ أو } g(x)=0\\ &\Leftrightarrow x=2 \text{ أو } x=4 \end{aligned}$$

بما أن $(u_n)$ تناقصية فإن لكل $n$ من $\mathbb{N}$ : $u_n\leq u_0$

إذن لكل $n$ من $\mathbb{N}$ : $u_n \leq 3$

إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq 3$

و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$