

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
الدورة العادية 2019  
-الموضوع-



المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

\*\*\*\*\*

NS22

3	مدة الانجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها	الشعبة أو المسلك

### تعليمات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة .

### مكونات الموضوع

يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين و مسألة، مستقلة فيما بينها، و تتوزع حسب المجالات كما يلي:

3 نقط	الهندسة الفضائية	التمرين الأول
3 نقط	الأعداد العقدية	التمرين الثاني
3 نقط	حساب الاحتمالات	التمرين الثالث
11 نقطة	دراسة دالة عددية و حساب التكامل و المتتاليات العددية	المسألة

ln يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري .

التمرين الأول (3 نقط):

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط  $A(1, -1, -1)$  و  $B(0, -2, 1)$  و  $C(1, -2, 0)$ 

1) (أ) بين أن  $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  0.75

(ب) استنتج أن  $x + y + z + 1 = 0$  هي معادلة ديكارتية للمستوى  $(ABC)$  0.52) لتكن  $(S)$  الفلكة التي معادلتها  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 1 = 0$ بين أن مركز الفلكة  $(S)$  هو النقطة  $\Omega(2, -1, 1)$  و أن شعاعها هو  $R = \sqrt{5}$  0.753) (أ) أحسب  $d(\Omega, (ABC))$  مسافة النقطة  $\Omega$  عن المستوى  $(ABC)$  0.5(ب) استنتج أن المستوى  $(ABC)$  يقطع الفلكة  $(S)$  وفق دائرة  $(\Gamma)$  (تحديد مركز وشعاع  $(\Gamma)$  غير مطلوب) 0.5

التمرين الثاني (3 نقط):

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$  المعادلة:  $z^2 - 2z + 4 = 0$  0.75

2) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  التي أحاطهاعلى التوالي هي:  $a = 1 - i\sqrt{3}$  و  $b = 2 + 2i$  و  $c = \sqrt{3} + i$  و  $d = -2 + 2\sqrt{3}$ 

(أ) تحقق أن  $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$  0.5

(ب) استنتج أن النقط  $A$  و  $C$  و  $D$  مستقيمة. 0.253) ليكن  $z$  لحق نقطة  $M$  و  $z'$  لحق النقطة  $M'$  صورة النقطة  $M$  بالدوران  $R$  الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{-\pi}{3}$ 

تحقق أن  $z' = \frac{1}{2}az$  0.5

4) لتكن  $H$  صورة النقطة  $B$  بالدوران  $R$ ، و  $h$  لحقها، و  $P$  النقطة التي لحقها  $p$  حيث  $p = a - c$ 

(أ) تحقق أن  $h = ip$  0.5

(ب) بين أن المثلث  $OHP$  قائم الزاوية و متساوي الساقين في  $O$  0.5

التمرين الثالث (3 نقط):

يحتوي صندوق على عشر كرات: ثلاث كرات خضراء و ست كرات حمراء و كرة واحدة سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس.

نسحب عشوائيا و تآبيا ثلاث كرات من الصندوق.

نعتبر الأحداث التالية: A: "الحصول على ثلاث كرات خضراء"

و B: "الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون"

و C: "الحصول على كرتين على الأقل من نفس اللون"

1) بين أن:  $p(A) = \frac{1}{120}$  و  $p(B) = \frac{7}{40}$  2

2) أحسب  $p(C)$  1

المسألة (11 نقطة) :

الجزء الأول :

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $]0, +\infty[$  بما يلي :  $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$

و  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (الوحدة 1cm)

(1) احسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  ثم أول النتيجة هندسيا 0.5

(2) (أ) تحقق أن لكل  $x$  من المجال  $]0, +\infty[$  :  $f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1\right) \ln x$  0.25

(ب) استنتج أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  0.5

(ج) بين لكل  $x$  من المجال  $]0, +\infty[$  :  $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$  ثم استنتج أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$  0.5

(د) بين أن المنحنى  $(C)$  يقبل فرعا شلجيميا بجوار  $+\infty$  اتجاهه المقارب المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = x$  0.75

(3) (أ) بين أن لكل  $x$  من  $]0, 1[$  :  $(x-1) + \ln x \leq 0$  و أن لكل  $x$  من  $]1, +\infty[$  :  $(x-1) + \ln x \geq 0$  0.5

(ب) بين أن لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x}$  1

(ج) ضع جدول تغيرات الدالة  $f$  0.5

(4) (أ) بين أن  $f''(x) = \frac{2-\ln x}{x^2}$  لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$  0.5

(ب) استنتج أن المنحنى  $(C)$  يقبل نقطة انعطاف يتم تحديد زوج إحداثياتها 0.5

(5) (أ) بين أن لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$  ،  $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$  ، واستنتج الوضع النسبي للمنحنى  $(C)$  و المستقيم  $(\Delta)$  0.5

(ب) أنشئ  $(\Delta)$  و  $(C)$  في نفس المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  1

(6) (أ) بين أن الدالة  $H : x \mapsto x \ln x - x$  هي دالة أصلية للدالة  $h : x \mapsto \ln x$  على المجال  $]0, +\infty[$  0.5

(ب) باستعمال مكامنة بالأجزاء بين أن  $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$  0.75

(ج) احسب ب  $cm^2$  مساحة حيز المستوى المحصور بين  $(C)$  و  $(\Delta)$  والمستقيمين اللذين معادلتهما  $x = e$  و  $x = 1$  0.5

الجزء الثاني :

لتكن  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة كما يلي :  $u_0 = 1$  و  $u_{n+1} = f(u_n)$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

(1) (أ) بين بالترجع أن لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  :  $1 \leq u_n \leq e$  0.5

(ب) بين أن المتتالية  $(u_n)$  تزايدية 0.5

(ج) استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة 0.5

(2) أحسب نهاية المتتالية  $(u_n)$  0.75



01.

(3 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط  $A(1, -1, -1)$  و  $B(0, -2, 1)$  و  $C(1, -2, 0)$ .

01.

أ- نبين أن:  $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  ..... (0.75 ن)

$$\overline{AC} \begin{pmatrix} 1-1 \\ -2+1 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \overline{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ و } \overline{AB} \begin{pmatrix} 0-1 \\ -2+1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \overline{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ لدينا}$$

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = (-1+2)\vec{i} - (-1+0)\vec{j} + (1+0)\vec{k} \text{ ومنه :}$$

خلاصة:  $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

ب- نستنتج أن:  $x+y+z+1=0$  هي معادلة ديكارتية للمستوى  $(ABC)$  ..... (0.5 ن)

طريقة 1:

✓ لدينا: المتجهة  $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  أي المتجهة  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}(1,1,1)$  منظمية على المستوى  $(ABC)$

$$M(x,y,z) \in (ABC) \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot (\overline{AB} \wedge \overline{AC}) = 0 \text{ ومنه :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \times (x-1) + 1 \times (y+1) + 1 \times (z+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1+y+1+z+1=0$$

$$\Leftrightarrow x+y+z+1=0$$

خلاصة:  $x+y+z+1=0$  هي معادلة ديكارتية للمستوى  $(ABC)$ .

طريقة 2:

• المتجهة  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}(1,1,1)$  متجهة منظمية على  $(ABC)$  إذن معادلة ديكارتية له هي على شكل  $x+y+z+d=0$ .

• النقطة  $A(1, -1, -1)$  تنتمي إلى المستوى  $(ABC)$  فإن:  $1 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times (-1) + d = 0$  ومنه:  $d = 1$ .

خلاصة:  $x+y+z+1=0$  هي معادلة ديكارتية للمستوى  $(ABC)$ .

02. لتكن  $(S)$  الفلكة التي معادلتها:  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 1 = 0$ . نتحقق من أن مركز الفلكة  $(S)$  هو  $\Omega(2, -1, 1)$  و

شعاعها هو  $R = \sqrt{5}$  ..... (0.75 ن)

$$\text{لدينا : } x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(x-2)^2} - 4 + \underbrace{y^2 + 2y + 1}_{(y+1)^2} - 1 + \underbrace{z^2 - 2z + 1}_{(z-1)^2} - 1 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 + (z-1)^2 - 1 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 5 = \sqrt{5}^2$$



و هي تمثل معادلة ديكارتية لفلكة مركزها  $\Omega(2,-1,1)$  و شعاعها  $R = \sqrt{5}$ .

**خلاصة:** مركز الفلكة (S) هي النقطة  $\Omega(2,-1,1)$  و أن شعاعها  $R = \sqrt{5}$ .

**03**

**أ-** نحسب:  $d(\Omega, (ABC))$  ..... (0.5 ن)

$$\text{لدينا: } d(\Omega, (ABC)) = \frac{|2-1+1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

**خلاصة:**  $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{3}$

**ب-** نستنتج أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة وفق دائرة  $(\Gamma)$  ..... (0.5 ن)

بما أن:  $\sqrt{5}$  هو شعاع الدائرة و لدينا:  $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{3} < \sqrt{5}$

**خلاصة:** المستوى (ABC) يقطع الفلكة وفق دائرة  $(\Gamma)$ .

**02** ..... (3 نقط)

**01** نحل في مجموعة الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$  المعادلة:  $z^2 - 2z + 4 = 0$  ..... (0.75 ن)

$$\checkmark \text{ نحسب المميز } \Delta: \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 4 - 16 = -12 < 0 \text{ : لدينا}$$

$$\text{إذن المعادلة لها حلين عقديين مترافقين هما: } z_1 = \frac{2+i\sqrt{-\Delta}}{2 \times 1} = \frac{2+i\sqrt{12}}{2} = \frac{2+i2\sqrt{3}}{2} = 1+i\sqrt{3} \text{ و } z_2 = \bar{z}_1 = 1-i\sqrt{3}$$

**خلاصة:** مجموعة حلول المعادلة هي:  $S = \{1+i\sqrt{3}; 1-i\sqrt{3}\}$

**02** في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  نعتبر النقط C, B, A و D التي أحاقها على

التوالي هي:  $a = 1-i\sqrt{3}$ ,  $b = 2+2i$ ,  $c = \sqrt{3}+i$ , و  $d = -2+2\sqrt{3}$ .

**أ-** نتحقق أن:  $a-d = -\sqrt{3}(c-d)$  ..... (0.5 ن)

$$\text{لدينا: } c-d = \sqrt{3}+i - (-2+2\sqrt{3}) = -\sqrt{3}+2+i$$

$$\text{و } a-d = 1-i\sqrt{3} - (-2+2\sqrt{3}) = 3-2\sqrt{3}-i\sqrt{3} = -\sqrt{3} \left( \frac{-\sqrt{3}+2+i}{c-d} \right) = -\sqrt{3}(c-d)$$

**خلاصة:**  $a-d = -\sqrt{3}(c-d)$

**ب-** نستنتج أن النقط C, A و D مستقيمية ..... (0.25 ن)

$$\text{لدينا: } a-d = -\sqrt{3}(c-d) \Leftrightarrow z_{\overline{DA}} = -\sqrt{3}z_{\overline{DC}} \text{ (مع } z_{\overline{DC}} \text{ و } z_{\overline{DA}} \text{ لحقي كل من المتجهتين } \overline{DA} \text{ و } \overline{DC} \text{ على التوالي)}$$

$$\Leftrightarrow \overline{DA} = -\sqrt{3}\overline{DC}$$

و بالتالي المتجهتين  $\overline{DA}$  و  $\overline{DC}$  مستقيمتين.

**خلاصة:** النقط C, A و D مستقيمية.

**03** ليكن z لحق نقطة M و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه O و زاويته  $\frac{-\pi}{3}$ .



نتحقق أن :  $z' = \frac{1}{2}az$  ..... (0.5 ن)

الكتابة العقدية للدوران R هي :  $z' - \omega = (z - \omega)e^{i\theta}$  مع  $\omega$  هو لحد مركز الدوران و  $\theta$  هو زاوية الدوران .

ومنه :  $z' - 0 = (z - 0)e^{i\frac{-\pi}{3}}$  ؛ (لأن  $\omega = 0$  هو لحد O مركز الدوران R و  $\theta = \frac{-\pi}{3}$  زاوية الدوران)

$$\begin{aligned} z' &= z \times \left( \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) \\ &= z \times \left( \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \\ &= z \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= z \frac{1}{2} (1 - i\sqrt{3}) \\ &= \frac{1}{2}az \quad ; \quad (1 - i\sqrt{3} = a) \end{aligned}$$

و بالتالي الكتابة العقدية للدوران R هي  $z' = \frac{1}{2}az$

**خلاصة :**  $z' = \frac{1}{2}az$

**04.** لتكن H صورة النقطة B بالدوران R ؛ و h لحدتها ؛ و P النقطة التي لحدتها p حيث  $p = a - c$  .

**أ-** نتحقق أن :  $h = ip$  ..... (0.5 ن)  
لدينا :

$$\begin{aligned} R(B) = H &\Leftrightarrow h = \frac{1}{2}ab \\ &\Leftrightarrow h = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})(2 + 2i) \\ &\Leftrightarrow h = (1 - i\sqrt{3})(1 + i) \\ &\Leftrightarrow h = (1 - i\sqrt{3}) + i(1 - i\sqrt{3}) \\ &\Leftrightarrow h = i \underbrace{(-i - \sqrt{3})}_{-c} + i \underbrace{(1 - i\sqrt{3})}_a \\ &\Leftrightarrow h = i(a - c) \\ &\Leftrightarrow h = ip \end{aligned}$$

**خلاصة :**  $h = ip$

**ب-** نبين أن : المثلث OHP قائم الزاوية و متساوي الساقين في O ..... (0.5 ن)  
لدينا :

$$\frac{h-0}{p-0} = \frac{ip}{p} = i \Rightarrow \begin{cases} \frac{|h-0|}{|p-0|} = |i| \\ \overline{(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH})} \equiv \arg\left(\frac{h-0}{p-0}\right) [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{OH}{OP} = 1 \\ \overline{(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH})} \equiv \arg(i) [2\pi] ; \left(\frac{h}{p} = i\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} OH = OP \\ \overline{(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

و منه :

- $OH = OP$  المثلث OHP متساوي الساقين في O .
  - $\overline{(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$  المثلث OHP قائم الزاوية في O
- خلاصة:** المثلث OHP قائم الزاوية و متساوي الساقين في O .

### 03 ..... (3 نقط)

يحتوي صندوق: على 10 كرات : ثلاث كرات خضراء و ست كرات حمراء و كرة واحدة سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس .  
نعتبر التجربة التالية : سحب عشوائيا و تانيا ثلاث كرات من الصندوق .  
نعتبر الأحداث التالية :

- ✓ الحدث A : " الحصول على ثلاث كرات خضراء "
- ✓ الحدث B : " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون "
- ✓ الحدث C : " الحصول على كرتين على الأقل من نفس اللون "

**01.** نبين أن :  $p(A) = \frac{1}{120}$  و  $p(B) = \frac{7}{40}$  ..... (2 ن)

✓ عدد السحبات الممكنة ( أي  $\text{card}\Omega$  ) :  
سحب ثلاث كرات في آن واحد من بين 10 كرات يمثل تاليفة ل 3 من بين 10 . ومنه عدد السحبات هو عدد التاليفات ل 3 من

$$\text{card}\Omega = C_{10}^3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 120 \text{ : إذن}$$

$$\text{card}\Omega = C_{10}^3 = 120 \text{ : إذن}$$

• نبين أن :  $p(A) = \frac{1}{120}$

- ✓ عدد السحبات التي تحقق الحدث A ( أي  $\text{card}A$  ) :
- ✓ الحدث A " الحصول على ثلاث كرات خضراء "

❖ الكرات الثلاث المسحوبة في آن واحد من اللون الأخضر من بين 3 إذن  $C_3^3 = \frac{3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3} = 1$  ( ملحوظة  $C_n^n = 1$  )

$$\text{و منه : } \text{card}A = C_3^3 = 1 \text{ و بالتالي : } p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}$$

خلاصة :  $p(A) = \frac{1}{120}$

❖ نبين أن :  $p(B) = \frac{7}{40}$

✓ عدد السحبات التي تحقق الحدث B ( أي cardB ) :

✓ الحدث " B " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون "

الحدث B نعبر عنه أيضا بما يلي : " الكرات الثلاث المسحوبة من اللون أخضر أو الكرات الثلاث المسحوبة من اللون أحمر "

▪ الكرات الثلاث المسحوبة و في آن واحد و من اللون أخضر من بين 3 كرات من اللون أخضر إذن  $C_3^3 = 1$  .

▪ الكرات الثلاث المسحوبة و في آن واحد و من اللون أحمر من بين 6 كرات من اللون أحمر إذن :  $C_6^3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$  .

▪ ومنه  $\text{card}B = C_3^3 + C_6^3 = 1 + 20 = 21$

ومنه :  $p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{C_3^3 + C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{21}{120} = \frac{7 \times 3}{3 \times 40} = \frac{7}{40}$

خلاصة :  $p(B) = \frac{7}{40}$

02. نحسب :  $p(C)$  ..... ( ن 1 )

✓ الحدث C : " الحصول على كرتين على الأقل من نفس اللون "

✓ عدد السحبات التي تحقق الحدث C ( أي cardC ) :

الطريقة 1 :

الحدث المضاد للحدث C هو  $\bar{C}$  " الحصول على كرة واحدة من كل لون "

الحدث  $\bar{C}$  نعبر عنه أيضا بما يلي : " الكرات الثلاث المسحوبة من ألوان مختلفة "

ومنه :  $\text{card}\bar{C} = C_3^1 \times C_6^1 \times C_1^1 = 3 \times 6 \times 1 = 18$

ومنه :  $\text{card}C = \text{card}\Omega - \text{card}\bar{C} = 120 - 18 = 102$

ومنه :  $p(C) = \frac{\text{card}C}{\text{card}\Omega} = \frac{\text{card}\Omega - \text{card}\bar{C}}{C_{10}^3} = \frac{120 - 18}{120} = \frac{102}{120} = \frac{6 \times 17}{6 \times 20} = \frac{17}{20}$

خلاصة :  $p(C) = \frac{17}{20}$

الطريقة 2 :

الحدث C نعبر عنه أيضا بما يلي : " C " ( الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون ) أو ( الحصول على كرتين بالضبط من نفس اللون )

• ( الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون ) إذن الحدث B إذن  $\text{card}B = C_3^3 + C_6^3 = 1 + 20 = 21$

• ( الحصول على كرتين بالضبط من نفس اللون ) إذن : " ( كرتين من اللون أخضر و كرة من اللونين المتبقين ) أو ( كرتين من اللون أحمر و كرة من اللونين المتبقين ) "

• ( كرتين من اللون أخضر و كرة من اللونين المتبقين و عددها 7 ) و هو يتم ب  $C_3^2 \times C_7^1$  كيفية مختلفة .

• ( كرتين من اللون أحمر و كرة من اللونين المتبقين و عددها 4 ) و هو يتم ب  $C_6^2 \times C_4^1$  كيفية مختلفة .

• إذن ( الحصول على كرتين بالضبط من نفس اللون ) و هو يتم ب  $C_3^2 \times C_7^1 + C_6^2 \times C_4^1 = 3 \times 7 + 15 \times 4 = 81$  كيفية مختلفة .

• ومنه :  $\text{card}C = C_3^3 + C_6^3 + C_3^2 \times C_7^1 + C_6^2 \times C_4^1 = 1 + 20 + 3 \times 7 + 15 \times 4 = 102$

و بالتالي :  $p(C) = \frac{\text{card}C}{\text{card}\Omega} = \frac{C_3^3 + C_6^3 + C_3^2 \times C_7^1 + C_6^2 \times C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{1 + 20 + 3 \times 7 + 15 \times 4}{120} = \frac{102}{120} = \frac{6 \times 17}{6 \times 20} = \frac{17}{20}$

خلاصة :  $p(C) = \frac{17}{20}$



## 04..... (11 نقطة)

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $]0, +\infty[$  بما يلي:  $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$ .  
و (C) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (الوحدة 1 cm).

I. الجزء الأول:

01. أحسب  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$  ثم أول النتيجة هندسياً. .... (0.5 ن)

❖ نحسب:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$

لدينا:

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty \Rightarrow \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -\ln x = +\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\ln x)^2 = +\infty \end{cases}$$

$$\bullet \text{ ومنه: } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 = +\infty$$

❖ خلاصة:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

❖ نؤول النتيجة هندسياً:

بما أن:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$  إذن المنحنى (C) يقبل مقارباً عمودياً هو المستقيم الذي معادلته  $x = 0$  (أي محور الأرتيب)

## 02.....

أ- نتحقق أن: لكل  $x$  من المجال  $]0, +\infty[$ :  $f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1\right) \ln x$  ..... (0.25 ن)

لدينا:

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1\right) \ln x &= x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln x \times \ln x - \ln x \\ &= x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (\ln x)^2 - \ln x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

❖ خلاصة: لكل  $x$  من المجال  $]0, +\infty[$ :  $f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1\right) \ln x$

ب- نستنتج أن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  ..... (0.5 ن)



لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  إذن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \ln x - 1 \right) \ln x = +\infty$

ومنه :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} \ln x - 1 \right) \ln x \right) = +\infty$

خلاصة :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ج- نبين أن لكل  $x$  من المجال  $]0, +\infty[$  :  $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left( \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$  ثم نستنتج أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$  ..... (0.5 ن)

• نبين أن :  $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left( \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$

لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{(\ln x)^2}{x} &= \frac{\left( \ln(\sqrt{x^2}) \right)^2}{(\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{(2 \ln \sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2} ; (\ln x^r = r \ln x ; r \in \mathbb{Q}) \\ &= \frac{4(\ln \sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2} \\ &= 4 \left( \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 \end{aligned}$$

خلاصة :  $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left( \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$

• نستنتج أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \left( \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 4 \left( \frac{\ln t}{t} \right)^2 ; (t = \sqrt{x} ; x \rightarrow +\infty ; t \rightarrow +\infty) \\ &= 0 ; \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0 \right) \end{aligned}$$

خلاصة :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$



**د-** نبين أن المنحنى (C) يقبل فرعاً شلجيميا بجوار  $+\infty$  اتجاهه المقارب المستقيم ( $\Delta$ ) الذي معادلته  $y = x$  ..... (0.75 ن) لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2x} - \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2} \frac{(\ln x)^2}{x} = 1$$

لأن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2x} = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$  (حسب ما سبق)

إذن :  $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  (لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} \ln x - 1 \right) \ln x - x \right) = +\infty$ )

إذن :  $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = +\infty$

وبالتالي :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  و  $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$  و  $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = +\infty$

**خلاصة :** المنحنى (C) يقبل فرعاً شلجيميا في اتجاه المستقيم ( $\Delta$ ) الذي معادلته  $y = x$  بجوار  $+\infty$ .

**03**

**أ-** نبين أن لكل  $x$  من  $]0,1[$  :  $(x-1) + \ln x \leq 0$  وأن لكل  $x$  من  $[1, +\infty[$  :  $(x-1) + \ln x \geq 0$  ..... (0.5 ن) نبين أن لكل  $x$  من  $]0,1[$  :  $(x-1) + \ln x \leq 0$  .

لدينا :

$$0 < x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 < x-1 \leq 0 \\ \ln x \leq 0 \end{cases}$$

(مجموع عددين سالبين هو عدد سالب)  $\Rightarrow (x-1) + \ln x \leq 0$

ومنه : لكل  $x$  من  $]0,1[$  :  $(x-1) + \ln x \leq 0$  .

نبين أن لكل  $x$  من  $[1, +\infty[$  :

لدينا :

$$x \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases}$$

(مجموع عددين موجبين هو عدد موجب)  $\Rightarrow (x-1) + \ln x \geq 0$

ومنه : لكل  $x$  من  $[1, +\infty[$  :  $(x-1) + \ln x \geq 0$  .

**خلاصة :** لكل  $x$  من  $]0,1[$  :  $(x-1) + \ln x \leq 0$  وأن لكل  $x$  من  $[1, +\infty[$  :  $(x-1) + \ln x \geq 0$  .

**ملحوظة :** يمكن استعمال جدول الإشارة لكل من  $x-1$  و  $\ln x$  على المجال  $]0, +\infty[$  .

**ب-** نبين أن لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x}$  ..... (1 ن)

لدينا :



$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right)' \\ &= 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \times 2 (\ln x)' \ln x \\ &= 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \times \ln x \\ &= \frac{x-1+\ln x}{x} \end{aligned}$$

خلاصة: لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x}$

ج- نضع جدول تغيرات الدالة  $f$  ..... (0.5 ن)

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0 +
$f(x)$		$+\infty$	$+\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$
		$\frac{3}{2}$	

04

أ- نبين أن لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$  :  $f''(x) = \frac{2-\ln x}{x^2}$  ..... (0.5 ن)

لدينا :

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' \\ &= \left( \frac{x-1+\ln x}{x} \right)' \\ &= \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right) \times x - (x-1+\ln x) \times 1}{x^2} \\ &= \frac{\cancel{x} + 1 - \cancel{x} + 1 - \ln x}{x^2} \\ &= \frac{2-\ln x}{x^2} \end{aligned}$$

خلاصة: لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$  :  $f''(x) = \frac{2-\ln x}{x^2}$

ب- نستنتج أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف يتم تحديد إحداثيتها ..... (0.5 ن)

❖ لتحديد نقطة انعطاف الدالة  $f$  ندرس إشارة  $f''$  الدالة المشتقة الثانية ل  $f$  .

❖ إشارة  $f''$  هي إشارة  $2-\ln x$  لأن  $x^2 > 0$

لدينا :  $2-\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 2$

$$\Leftrightarrow x \leq e^2$$

ومنه إشارة " f بواسطة الجدول التالي :

x	0	e <sup>2</sup>	+∞
f''(x)	+	0	-

❖ من خلال الجدول :

الدالة المشتقة الثانية f'' تنعدم في e<sup>2</sup> و تتغير إشارتها بجوار e<sup>2</sup> إذن النقطة التي زوج إحداثيتها  $(e^2, f(e^2)) = (e^2, \frac{2e^2+1}{2})$

هي نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f .

..05

أ- نبين أن لكل x من ]0, +∞[ :  $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$  ثم نستنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ) ... (0.5 ن)

• نبين أن لكل x من ]0, +∞[ :  $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$

$$\frac{1}{2}(\ln x - 1)^2 = \frac{1}{2}((\ln x)^2 - 2\ln x + 1)$$
 لدينا :

$$= \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2} + x - x$$

$$= f(x) - x$$

خلاصة : لكل x من ]0, +∞[ :  $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$

• نستنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ) .

لهذا ندرس إشارة :  $f(x) - x$  أي إشارة  $\frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$  و هي بدورها موجبة على ]0, +∞[ ولكن تنعدم في  $\ln x - 1 = 0$  أي  $x = e$  .

خلاصة :

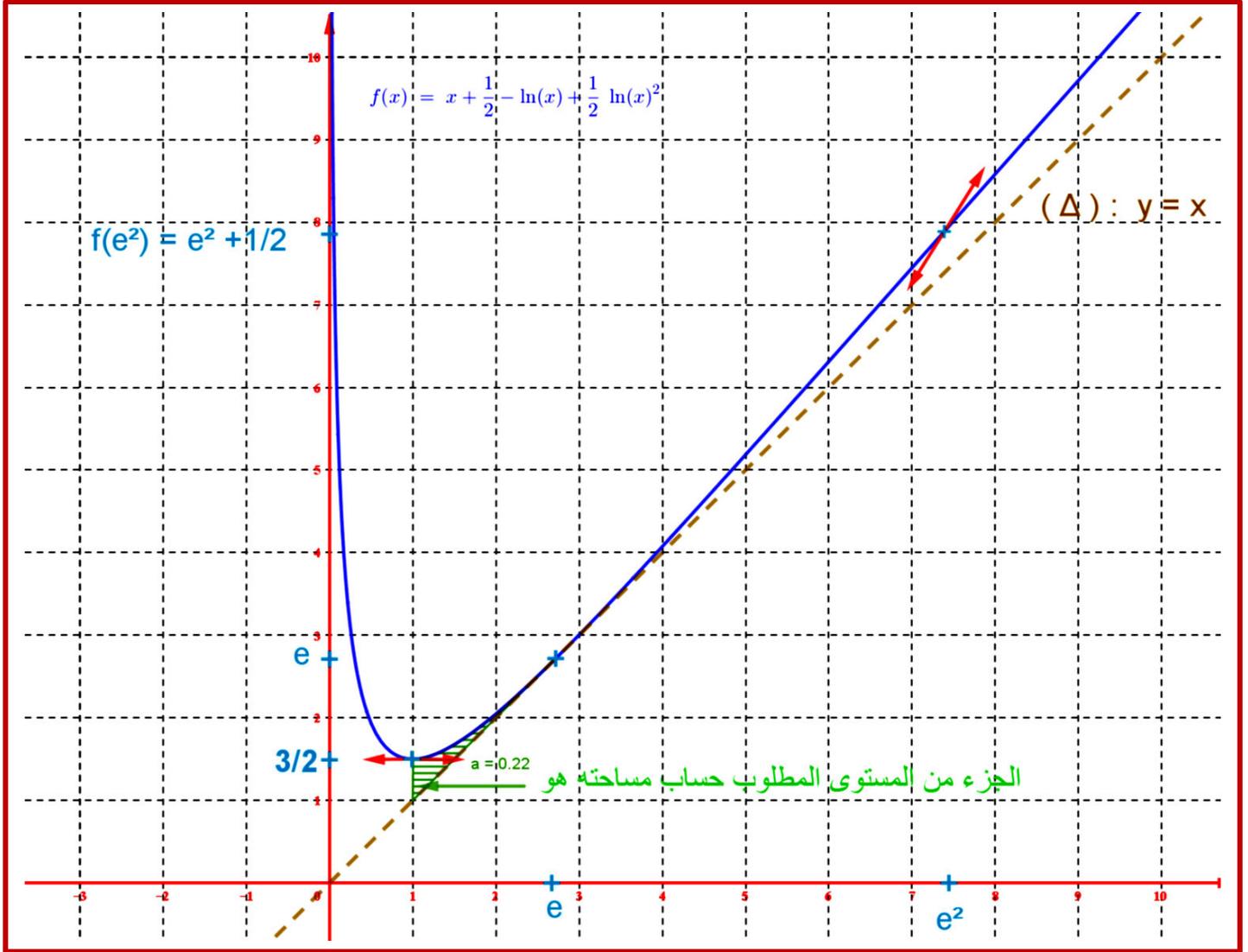
➤ المنحنى (C) يوجد قطعاً فوق المستقيم (Δ) على كل من المجالين ]0, e[ و ]e, +∞[ .

➤ المنحنى (C) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة التي إحداثيتها  $(e, f(e)) = (e, e)$

➤ نلخص ذلك بواسطة الجدول التالي :

x	0	e	+∞
$f(x) - x$ و $(\ln x - 1)^2$ لهما نفس الإشارة	+	0	+
الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ)	(C) فوق (Δ)	(C) و (Δ) يتقاطعان في $x = e$	(C) فوق (Δ)

ب- نثني المستقيم (Δ) والمنحنى (C) في نفس المعظم (O, i, j) . ..... (1 ن)



06

أ- نبين أن: الدالة  $H : x \mapsto x \ln x - x$  هي دالة أصلية للدالة  $h : x \mapsto \ln x$  على  $]0, +\infty[$  ..... (0.5 ن)

لهذا نبين أن:  $H'(x) = h(x)$ .

لدينا:  $H'(x) = (x \ln x - x)'$

$$= (x)' \ln x + (x)(\ln x)' - (x)'$$

$$= 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1$$

$$= \ln x + 1 - 1$$

$$= \ln x = h(x)$$

ومنه:  $H'(x) = h(x)$

خلاصة: الدالة  $H : x \mapsto x \ln x - x$  هي دالة أصلية للدالة  $h : x \mapsto \ln x$  على  $]0, +\infty[$ .

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء نبين أن :  $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$  ..... (0.75 ن)

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx = \int_1^e (\ln x) \times (\ln x) dx$$

نكتب :

$$u(x) = \ln x \quad u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$(1) \downarrow \quad (2) \searrow \quad - \quad \downarrow (3)$$

$$v'(x) = \ln x \quad v(x) = x \ln x - x$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \int_1^e (\ln x)^2 dx &= \overbrace{\left[ \ln x \times (x \ln x - x) \right]_1^e}^{(1)} - \overbrace{\int_1^e \frac{1}{x} \times (x \ln x - x) dx}^{(2)} \\ &= (\ln e \times (e \ln e - e)) - (\ln 1 \times (1 \ln 1 - 1)) - \int_1^e (\ln x - 1) dx \\ &= (1(e \times 1 - e) - 0) - \int_1^e \ln x dx + \int_1^e 1 dx \\ &= 0 - [x \ln x - x]_1^e + [x]_1^e \quad ; \quad (H'(x) = h(x)) \\ &= -((e \times 1 - e) - (1 \times 0 - 1)) + (e - 1) \\ &= 0 - 1 + e - 1 \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2 \quad \text{خلاصة :}$$

ج- نحسب ب  $cm^2$  مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و ( $\Delta$ ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما  $x = e$  و  $x = 1$ .

..... (0.5 ن)

المساحة المطلوبة هي :

$$\begin{aligned} \text{(وحدة المساحة)} \quad cm^2 &= \left( \int_1^e |f(x) - x| dx \right) \times \|i\| \times \|j\| = \left( \int_1^e (f(x) - x) dx \right) \times \|i\| \times \|j\| \\ &= \left( \int_1^e \left( x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 - x \right) dx \right) \times 1 \times 1 \quad cm^2 \\ &= \int_1^e \frac{1}{2} dx - \int_1^e \ln x dx + \frac{1}{2} \int_1^e (\ln x)^2 dx \quad cm^2 \\ &= \frac{1}{2} [x]_1^e - [x \ln x - x]_1^e + \frac{1}{2} (e - 2) \quad cm^2 \\ &= \frac{1}{2} (e - 1) - \underbrace{((e \times 1 - e) - (1 \times 0 - 1))}_{-1} + \frac{1}{2} (e - 2) \quad cm^2 \\ &= \frac{e}{2} - \frac{1}{2} - 1 + \frac{e}{2} - 1 = e - \frac{5}{2} \quad cm^2 \end{aligned}$$

**خلاصة:** مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و ( $\Delta$ ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما  $x=1$  و  $x=e$  هي  $\frac{2e-5}{2} \text{ cm}^2$ .

**II. الجزء الثاني:**

لتكن المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كما يلي:  $u_0 = 1$  و  $u_{n+1} = f(u_n)$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$ .

**01..**

**أ-** نبين بالترجع أن:  $1 \leq u_n \leq e$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  ..... (ن 5.0)

- نتحقق أن العلاقة صحيحة ل  $n=0$
- لدينا:  $1 \leq u_0 = 1 \leq e$  و منه العلاقة صحيحة من أجل  $n=0$ .
- نفترض أن العلاقة صحيحة للرتبة  $n$ : أي  $1 \leq u_n \leq e$  (معطيات الترجع).
- نبين أن العلاقة صحيحة ل  $n+1$ : أي نبين أن:  $1 \leq u_{n+1} \leq e$

حسب معطيات الترجع لدينا:  $1 \leq u_n \leq e$ .

و منه:  $1 \leq u_n \leq e \Rightarrow f(1) \leq f(u_n) \leq f(e)$  (لأن  $f$  تزايدية على  $[1, e]$  و  $1 \leq u_n \leq e$ )

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq e \quad (\text{لأن } f(e) = e \text{ تقاطع مع المستقيم } (\Delta) \text{ و } f(1) = \frac{3}{2} \text{ جدول تغيرات})$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq e$$

و منه: العلاقة صحيحة ل  $n+1$ .

**خلاصة:**  $1 \leq u_n \leq e$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$ .

**ب-** نبين أن المتتالية  $(u_n)$  تزايدية ..... (ن 0.5)

لهذا نبين أن:  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$ .

ليكن  $n$  من  $\mathbb{N}$  نضع  $x = u_n$  ولدينا:  $1 \leq u_n \leq e$  أي  $u_n \in [1, e]$

حسب نتيجة السؤال I (5) (-): (C) فوق ( $\Delta$ ) على  $[1, e]$  إذن: لكل  $x$  من  $[1, e]$  فإن  $f(x) - x \geq 0$  أي  $f(x) \geq x$ .

أي:  $x \in [1, e] \Rightarrow f(x) \geq x$

$$\Rightarrow f(u_n) \geq u_n ; (u_n = x \text{ و } 1 \leq u_n \leq e)$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq u_n ; (u_{n+1} = f(u_n))$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0$$

وبالتالي: لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  لدينا  $u_{n+1} \geq u_n$  (أو أيضا  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ )

**خلاصة:** المتتالية  $(u_n)$  تزايدية.

**ملحوظة:** يمكن استعمال الترجع (أي نبين لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  لدينا  $u_{n+1} \geq u_n$ )

**ج-** نستنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة ..... (ن 0.5)

لدينا:

✓ المتتالية  $(u_n)$  تزايدية.

✓ المتتالية  $(u_n)$  مكبورة (لأن  $1 \leq u_n \leq e$ )

إذن حسب خاصية : المتتالية  $(u_n)$  متقاربة (مع نهايتها  $l$  حيث  $l \in \mathbb{R}$ )

خلاصة :  $(u_n)$  متقاربة

02. نحدد نهاية المتتالية  $(u_n)$  . ..... (75.0 ن)

• المتتالية تكتب على شكل  $u_{n+1} = f(u_n)$

• الدالة  $f$  متصلة على  $I = [1, e]$

•  $f(I) = [f(1), f(e)] = [\frac{3}{2}, e] \subset I = [1, e]$  (لأن  $f$  متصلة و تزايدية على  $[1, e]$  و  $f(1) = \frac{3}{2}$  و  $f(e) = e$ )

• لدينا :  $u_0 = 1 \in [1, e]$

•  $(u_n)$  متقاربة إذن نهايتها  $l$  من  $\mathbb{R}$ .

إذن :  $l$  هو حل للمعادلة  $f(x) = x$  ;  $x \in I = [1, e]$  ( حسب خاصية ).

أي ندرس تقاطع المنحنى  $(C)$  و المستقيم  $(\Delta)$  على  $[1, e]$  و حسب ما سبق المنحنى  $(C)$  و المستقيم  $(\Delta)$  يتقاطعان في

نقطة وحيدة حيث زوج إحداثياتها هي  $(e, e)$  و منه حل المعادلة السابقة هي  $x = e \in [1, e]$  إذن  $l = e$

خلاصة :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$