المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2020
– الموضوع -

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS | NS 25

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة بالفرنسية)	المعامل	9

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte (5) pages numérotées de 1/5 à 5/5
- L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux.
- **Le candidat doit traiter EXERCICE3 et EXERCICE4 et choisir de traiter EXERCICE1 ou bien EXERCICE2.**
- **Le candidat doit traiter au total trois (3) exercices** :

- **EXERCICE1** qui concerne l'arithmétique **(au choix)**...**3.5 points**
- **ou bien**
  EXERCICE2 qui concerne les structures algébriques **(au choix)..............................3.5 points**

- **EXERCICE3** qui concerne les nombres complexes **(obligatoire)**...............................**3.5 points**

- **EXERCICE4** qui concerne l'analyse **(obligatoire)**...**13 points**

L'usage de la calculatrice est strictement interdit

Tu choisis de traiter EXERCICE1 ou bien EXERCICE2

Tu traites obligatoirement EXERCICE3 et EXERCICE4

EXERCICE1 :(3.5 points/au choix)

(Si tu choisis de traiter EXERCICE1, il ne faut pas traiter EXERCICE2)

On considère dans ¢ ´ ¢ l'équation $(D)\ :\ 7x^3 - 13y = 5$

1- Soit (x,y)Î ¢ ´ ¢ une solution de l'équation (D)

0.5 a) Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.

0.5 b) En déduire que : $x^{12} \equiv 1 \quad [13]$

1 c) Montrer que : $x^{3} \equiv 10 \quad [13]$

0.5 d) En déduire que : $x^{12} \equiv 3 \quad [13]$

1 2- Déduire des questions précédentes, que l'équation (D) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

<u>EXERCICE2</u> : (3.5 points/au choix)

(Si tu choisis de traiter EXERCICE2, il ne faut pas traiter EXERCICE1)

On note par $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre deux.

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau non commutatif unitaire d'unité $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

et que $(\mathbb{R}^*,\times)$ est un groupe commutatif.

On considère le sous-ensemble E de $M_2(\mathbb{R})$ défini par : $E=\left\{\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix} / \ x\in\mathbb{R} \ et \ y\in\mathbb{R}^*\right\}$.

0.5 1- a) Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

0.5 b) Montrer que la multiplication n'est pas commutative dans E

0.5 c) Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}^*)$; $\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & -\frac{x}{y}\\ 0 & \frac{1}{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{x}{y}\\ 0 & \frac{1}{y}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

0.5 2- Montrer que $(E,\times)$ est un groupe non commutatif.

3- On considère le sous-ensemble F de E défini par : $F=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}1 & x-1\\ 0 & x\end{pmatrix} / x\in\mathbb{R}^*\right\}$

0.5 a) Montrer que l'application φ définie par : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$; $\varphi(x)=M(x)$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(E,\times)$.

1 b) En déduire que $(F,\times)$ est un groupe commutatif dont on précisera l'élément neutre.

<u>EXERCICE3</u> :(3.5 points/obligatoire)

Soit m un nombre complexe non nul.

<u>Première partie</u> :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z , (E) : $z^3-2mz^2+2m^2z-m^3=0$

0.5 1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) (On remarque que m est une solution de l'équation (E))

2- On note z_1 et z_2 les deux autres solutions de l'équation (E) autre que m

0.25 a) Vérifier que : $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{1}{m}$

0.5 b) Dans le cas où $m=1+e^{i\frac{\pi}{3}}$, écrire sous la forme algébrique z_1 et z_2

Deuxième partie :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

On considère les points A et B d'affixes respectives $a=me^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b=me^{-i\frac{\pi}{3}}$

On note P le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme O en A,

Q le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme A en B

et R le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme B en O

0.25 1- Montrer que les points O , A et B ne sont pas alignés.

1 2-a) Montrer que l'affixe de P est $p=m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ et que l'affixe de R est $r=m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

0.5 b) Montrer que l'affixe de Q est $q=m\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

0.5 3- Montrer que $OQ=PR$ et que les deux droites (OQ) et (PR) sont perpendiculaires.

EXERCICE4 :(13 points/obligatoire)

Première partie :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=[0;+\infty[$ par :

$$f(0)=0 \quad \text{et} \quad (\forall x\in\,]0;+\infty[) \quad ; \quad f(x)=x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(On prendra $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$)

0.5 1- On appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t\mapsto \ln(t)$ sur l'intervalle $[x,x+1]$, montrer que : (P) $(\forall x\in\,]0;+\infty[)$; $\frac{1}{x+1}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}$

0.5 2-a) En utilisant la proposition (P) , montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0

0.5 b) En utilisant la proposition (P), montrer que la courbe (C) admet une branche parabolique dont on précisera la direction.

0.75 3-a) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que :

$$(\forall x\in\,]0;+\infty[)\quad ; \quad f'(x)=3x^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{3(1+x)}\right)$$

0.5 b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur I

(On pourra utiliser la proposition (P))

0.25 c) Dresser le tableau de variations de f

4- Pour tout $x\in\,]0;+\infty[$, on pose : $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

0.75 a) Vérifier que : $(\forall x\in\,]0;+\infty[)\ ;\ g'(x)=2x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2(1+x)}\right)$, en déduire que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

0.5 b) Montrer que l'équation $g(x)=1$ admet sur $\mathbb{R}_+^*$, une solution unique notée α

puis vérifier que $\alpha\in\,]1;2[$ (On prendra $\ln 2=0.7$ et $\ln\frac{3}{2}=1.5$)

0.5 c) En déduire que les seules solutions de l'équation $f(x)=x$ sont 0 et α

0.5 5-a) Représenter graphiquement la courbe (C).

(On précisera la demi-tangente à droite en O et la branche parabolique de (C))

0.25 b) Montrer que f est une bijection de I vers I (On note f^{-1} sa bijection réciproque)

Deuxième partie :

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $0<u_0<\alpha$ et $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}=f^{-1}(u_n)$

0.5 1- Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 0<u_n<\alpha$

0.5 2-a) Montrer que : $g(]0;\alpha[)=\,]0;1[$

0.5 b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.

0.25 c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

0.5 3- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Troisième partie :

On considère la fonction F définie sur l'intervalle I par : $(\forall x\in I)\ ;\ F(x)=\int_x^1 f(t)\,dt$

0.5 1-a) Etudier suivant les valeurs de x, le signe de $F(x)$

0.5 b) Montrer que la fonction F est dérivable sur I et déterminer sa dérivée première F'

0.25 c) En déduire que F est strictement décroissante sur I

0.5 2-a) Montrer que : $(\forall x\in[1;+\infty[)\quad ;\quad F(x)\le(1-x)\ln 2$

0.25 b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

0.5 3-a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x\in]0;+\infty[)\quad ;\quad F(x)=\frac{\ln 2}{4}-\frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{4}\int_x^1\frac{t^3}{t+1}dt$$

0.5 b) Calculer $\int_x^1\frac{t^3}{t+1}dt$ pour tout $x\in]0;+\infty[$ (On remarque que : $\frac{t^3}{1+t}=t^2-t+1-\frac{1}{1+t}$)

0.5 c) En déduire que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\quad ;\quad F(x)=\frac{5}{24}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

0.5 d) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)$, en déduire la valeur de $\int_0^1 f(t)dt$

4- Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $v_n=\sum\limits_{k=0}^{k=n-1}\left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)\right)$

0.5 a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$:

$$-\frac{1}{2n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\le F\left(\frac{2k+1}{2n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)\le-\frac{1}{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0.5 b) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad ;\quad -\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{k=n}f\left(\frac{k}{n}\right)\le v_n\le-\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=0}^{k=n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$

(On remarque que : $\frac{2k+1}{2n}<\frac{k+1}{n}$)

0.25 c) Montrer que la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

FIN

الصفحة
1 / 4
**I

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2020
- عناصر الإجابة -

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS | NR 25

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة بالفرنسية)	المعامل	9

N.B : Si un candidat traite les deux exercices qui sont au choix (totalement ou partiellement) on lui attribue la meilleure note obtenue parmi les deux notes (et non pas la somme des deux notes).

EXERCICE1		**Eléments de réponses**	**Barème**
1-	a)	Si d est un diviseur commun positif à x et 13 alors c'est un diviseur commun à 13 et 5 donc $d=1$	0.5
	b)	13 est premier et 1 3 et x sont premier entre eux , et on applique le théorème de FERMAT	0.5
	c)	On a : $7x^3 \equiv 5\ [13]$ et donc $x^3 \equiv 2\times 5\ [13]$ car : $2\times 7 \equiv 1\ [13]$	1
	d)	On a $x^3 \equiv 10\ [13]$ donc $\left(x^3\right)^4 \equiv 10^4\ [13]$ donc $x^{12} \equiv 3\ [13]$	0.5
2-		Si $(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ est solution de (E) alors d'après la question 1- on a $x^{12} \equiv 1\ [13]$ et $x^{12} \equiv 3\ [13]$ donc $3 \equiv 1\ [13]$ ce qui est absurde	1

EXERCICE2		**Eléments de réponses**	**Barème**
1-	a)	Stabilité de E dans $\left(M_2(\mathbb{R}),\times\right)$	0.5
	b)	La non commutativité de la multiplication dans E	0.5
	c)	Vérification	0.5
2-		$(E,\times)$ est un groupe non commutatif	0.5
3-	a)	φ est un morphisme	0.5
	b)	φ est un morphisme et $\varphi\left(\mathbb{R}^*\right)=F$ et $\left(\mathbb{R}^*,\times\right)$ est un groupe commutatif………………………………………………………….0.5 Son élément neutre est $\varphi(1)=I$ ………………………..0.5	1

EXERCICE3		Eléments de réponses	Barème
Première partie :			
1-		$(E) \Leftrightarrow (z-m)(z^2-mz+m^2)=0$ Les solutions de l'équation (E) sont : m et $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}m = e^{i\frac{\pi}{3}}m$ et $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}m = e^{-i\frac{\pi}{3}}m$	0.5
2-	a)	On vérifie que $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}=\frac{m}{m^2}$	0.25
	b)	On trouve $z_1 = i\sqrt{3}$ et $z_2 = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$	0.5
Deuxième partie :			
1-		Les points O , A et B ne sont pas alignés	0.25
2-	a)	Calcul de p ....0.5 Calcul de r 0.5	1
	b)	Calcul de q	0.5
3-		On a $\frac{p-r}{q}=i$ on déduit que : $OQ = PR$ ....0.25 et $(OQ)\perp(PR)$ 0.25	0.5

EXERCICE4		Eléments de réponses	Barème
Première partie :			
1-		$(\forall x>0)\ (\exists c_x \in]x;x+1[)$; $\ln(x+1)-\ln x = \frac{1}{c_x}$ ....0.25 L'encadrement : $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$ 0.25	0.5
2-	a)	On a : $\frac{x^2}{1+x} < \frac{f(x)}{x} < x$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=0$ et donc f est dérivable à droite en 0	0.5
	b)	On a : $\frac{x^2}{1+x} < \frac{f(x)}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ .... (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées	0.5
3-	a)	f dérivable sur $]0;+\infty[$ ....0.25 Calcul de $f'(x)$ 0.5	0.75

	b)	On a : $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{3(1+x)}>\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}>0$ donc $f'(x)>0$ et donc la f est strictement croissante	0.5
	c)	Le tableau de variations f …………………………….	0.25
4-	a)	Calcul de $g'(x)$ ………………………………………………. 0.5 On a : $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2(1+x)}>\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}>0$ donc $g'(x)>0$ et donc g est strictement croissante …………….0.25	0.75
	b)	g est une bijection de $]0;+\infty[$ vers $]0;+\infty[$ et $1\in]0;+\infty[$ …0.25 Ou utiliser le T.V.I pour l'existence et la stricte monotonie pour l'unicité On vérifie que $g(1)<1<g(2)$ ……………………………………………0.25	0.5
	c)	les solutions de l'équation : $f(x)=x \Leftrightarrow x=0$ ou $g(x)=1$	0.5
5-	a)	La représentation de (C)	0.5
	b)	f bijection	0.25
Deuxième partie :			
1-		Récurrence et croissance de f^{-1} et le fait que $f^{-1}(0)=0$ et $f^{-1}(\alpha)=\alpha$	0.5
2-	a)	$g(]0;\alpha[)=]0;1[$………………………………………………………………………	0.5
	b)	Pour $0<x<\alpha$, on a $0<g(x)<1$ Puisque $0<u_n<\alpha$,alors $0<f(u_n)<u_n$ donc $0<u_n<f^{-1}(u_n)=u_{n+1}$ donc………………………………………	0.5
	c)	suite croissante et majorée	0.25
3-		Si on pose : $l=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ alors on a $0<u_0\le l\le\alpha$ car $(\forall n\geq 1)$; $0<u_0\le u_n<\alpha$ et puisque f^{-1} est continue sur $[0;\alpha]$ (en particulier en l) alors l est solution de l'équation $f^{-1}(x)=x$ et donc $l=\alpha$	0.5
Troisième partie :			
1-	a)	f est positive donc si $0\le x\le 1$ on a $F(x)\geq 0$ et si $x\geq 1$ on a $F(x)\le 0$	0.5
	b)	F est dérivable sur I car f est continue sur I ……………………0.25	0.5

		et $(\forall x\in I)\ ;\ F'(x)=-f(x)$ 0.25	
	c)	$(\forall x\in I)\ ;\ F'(x)=-f(x)\leq 0$ et $F'(x)=0\Leftrightarrow x=0$	0.25
2-	a)	On a $\forall x\geq 1\ ;\ f(x)\geq \ln 2$ donc $\int_1^x f(t)dt\geq (x-1)\ln 2$	0.5
	b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=-\infty$	0.25
3-	a)	Intégration par parties	0.5
	b)	$\int_x^1 \frac{t^3}{t+1}dt=\frac{5}{6}-\ln 2-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+\ln(1+x)$	0.5
	c)	Calcul de $F(x)$	0.5
	d)	On a $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)=\frac{5}{24}$ ....0.25 F étant continue à droite en 0 (puisque continue sur I), donc $\int_0^1 f(t)dt=F(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)=\frac{5}{24}$ 0.25	0.5
4-	a)	- Appliquer le théorème ou l'inégalité des accroissements finis à la fonction F sur $\left[\frac{k}{n},\frac{2k+1}{2n}\right]$ Avec $\left(\forall x\in\left[\frac{k}{n},\frac{2k+1}{2n}\right]\right)$; $f\left(\frac{k}{n}\right)\leq f(x)\leq f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$	0.5
	b)	On remarque que : $\frac{2k+1}{2n}<\frac{k+1}{n}$	0.5
	c)	$\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ sont les Sommes de Riemann associées à la fonction f continue sur le segment $[0,1]$ donc les deux suites $\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)_n$ et $\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)_n$ sont convergentes et ont même limite qui est $F(0)=\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{24}$ donc la suite (v_n) est convergente et a pour limite $-\frac{1}{2}F(0)=-\frac{5}{48}$	0.25