المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2022
- الموضوع -

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS-SS

NS 24

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	مسلك العلوم الرياضية – أ و ب	المعامل	9

تعليمات:

- مدة الاختبار هي أربع ساعات.
- يتضمن موضوع الاختبار أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن أن تنجز التمارين حسب الترتيب الذي يختاره المترشح.

- التمرين1 يتعلق بالتحليل...(10 نقط)
- التمرين2 يتعلق بالأعداد العقدية....................................(3.5 نقطة)
- التمرين3 يتعلق بالحسابيات..(3 نقط)
- التمرين4 يتعلق بالبنيات الجبرية.....................................(3.5 نقطة)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر

التمرين 1: (10 نقط)

A. 1- تحقق أن: $0 \le 1 - x + x^2 - \dfrac{1}{x+1} \le x^3 \quad ; \quad (\forall x \in \mathbb{R}^+)$ 0.25

2- استنتج أن: $0 \le x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ln(1+x) \le \dfrac{x^4}{4} \quad ; \quad (\forall x \in \mathbb{R}^+)$ 0.25

B. نعتبر الدالة f المعرفة على $I = [0,+\infty[$ بما يلي:

$f(0) = \dfrac{1}{2}$ و لكل x من $]0,+\infty[$ ؛ $f(x) = \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2}$

و ليكن (C) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- أ) بين أن f متصلة على اليمين في 0 0.5

ب) بين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 0.5

ج) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. 0.5

2-أ) بين أن: $f'(x) = -\dfrac{g(x)}{x^3} \quad ; \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$

حيث: $g(x) = x + \dfrac{x}{x+1} - 2\ln(1+x)$ 0.5

ب) بين أن: $0 \le g'(x) \le x^2 \quad ; \quad (\forall x \in I)$ 0.5

ج) استنتج أن: $0 \le g(x) \le \dfrac{x^3}{3} \quad ; \quad (\forall x \in I)$ 0.25

د) حدد منحى تغيرات الدالة f على I 0.25

3-أ) اعط جدول تغيرات الدالة f 0.25

ب) مثل مبيانيا المنحنى (C) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

(نأخذ $\|\vec{i}\| = 2cm$ و $\|\vec{j}\| = 2cm$) 0.5

C. 1- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0;1[$ بحيث $f(\alpha) = \alpha$ 0.5

2- نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي:

$u_0 = \dfrac{1}{3}$ و $u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

أ) بين أن: $u_n \in [0;1] \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ 0.5

ب) بين أن: $|u_{n+1} - \alpha| \le \left(\dfrac{1}{3}\right)|u_n - \alpha| \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ 0.5

ج) بين بالترجع أن: $\left|u_n-\alpha\right|\leq\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad ; \quad (\forall n\in\mathbb{N})$	0.5
د) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تؤول إلى α	0.25

D. لكل x من I، نضع: $F(x)=\int_x^1 f(t)dt$

1- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على I و احسب $F'(x)$ لكل x من I	0.5
2- أ) باستعمال طريقة المكاملة بالأجزاء، بين أن: $F(x)=2ln2-\left(1+\frac{1}{x}\right)ln(1+x) \quad ; \quad (\forall x\in]0,+\infty[)$	0.5
ب) احسب $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)$ ، ثم استنتج أن: $\int_0^1 f(t)dt=2ln(2)-1$	0.5
ج) احسب ، بالسنتمتر مربع (cm^2)، مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و محور الأراتيب و المستقيم ذي المعادلة $x=1$.	0.5

E. نضع: لكل k من $\mathbb{N}$ ، $\Delta_k=f(k)-\int_k^{k+1}f(t)dt$

و لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، $S_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}\Delta_k$

1-أ) تحقق أن: $0\leq\Delta_k\leq f(k)-f(k+1) \quad ; \quad (\forall k\in\mathbb{N})$	0.25
ب) استنتج أن: $0\leq S_n\leq\frac{1}{2} \quad ; \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*)$	0.5
2 -أ) بين أن المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ رتيبة.	0.25
ب) استنتج أن المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة.	0.25
ج) بين أن النهاية l للمتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تحقق: $\frac{3}{2}-2ln2\leq l\leq\frac{1}{2}$	0.25

<u>التمرين 2</u> : (3.5 نقط)

ليكن m **عددا عقديا معلوما وغير منعدم** و $j=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

I. نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z

$$(E_m)\ :\quad z^2+mj^2z+m^2j=0$$

1- تحقق أن: $j^3=1$ و $1+j+j^2=0$	0.5
2-أ) بين أن مميز المعادلة (E_m) هو : $\Delta=\left[m(1-j)\right]^2$	0.25
ب) حدد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E_m)	0.5

0.5 | 3- نفترض في هذا السؤال أن : $m = 1 + i$

بين أن $\left(z_1 + z_2\right)^{2022}$ عدد تخيلي صرف.

II. المستوى العقدي منسوب لمعلم متعامد ممنظم و مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

ليكن φ التحويل في المستوى العقدي الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث:

$z' = (1 + j)z$

0.25 | 1- حدد طبيعة التطبيق φ وعناصره المميزة.

2- نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي m و mj و mj^2

و لتكن $A'(a')$ و $B'(b')$ و $C'(c')$ صور النقط A و B و C على التوالي بالتطبيق φ ولتكن

$P(p)$ و $Q(q)$ و $R(r)$ منتصفات القطع $[BA']$ و $[CB']$ و $[AC']$ على التوالي.

0.75 | أ) بين أن: $a' = -mj^2$ و $b' = -m$ و $c' = -mj$

0.25 | ب) بين أن: $p + qj + rj^2 = 0$

0.5 | ج) استنتج أن المثلث PQR متساوي الأضلاع.

التمرين3: (3 نقط)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر قطعا من 1

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $\quad (x+1)^n - x^n = ny \quad : \quad (E_n)$

ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E_n) في $\mathbb{Z}^2$ و ليكن p **أصغر قاسم أولي** للعدد n

0.25 | 1- أ) بين أن: $(x+1)^n \equiv x^n \; [p]$

0.25 | ب) بين أن p أولي مع x و مع $(x+1)$

0.25 | ج) استنتج أن $(x+1)^{p-1} \equiv x^{p-1} \; [p]$

0.5 | 2- بين أنه إذا كان n عددا زوجيا فإن المعادلة (E_n) لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

3- نفترض أن n عدد فردي.

0.5 | أ) بين أنه يوجد زوج (u,v) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث: $nu + (p-1)v = 1$

(نذكر أن p أصغر قاسم أولي للعدد n)

0.25 | ب) ليكن q و r بالتوالي خارج و باقي القسمة الاقليدية للعدد u على العدد $(p-1)$.

تحقق أن : $nr = 1 - (p-1)(v+nq)$

0.5 | ج) نضع: $v' = -(v + nq)$. بين أن: $v' \geq 0$

0.5 | د) بين أن المعادلة (E_n) لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

<u>التمرين4</u>: (3.5 نقطة)

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية غير تبادلية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و أن $(\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية و كاملة.

ليكن: $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

1- أ) بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{R}),+)$ — 0.25

ب) تحقق أن لكل a و b و c و d من $\mathbb{Z}$ ، لدينا: — 0.25

$$M(a,b)\times M(c,d)=M(ac+3bd,ad+bc)$$

ج) بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية و واحدية. — 0.5

2- ليكن φ التطبيق من E نحو $\mathbb{Z}$ المعرف بما يلي:

$$\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2\;;\quad\varphi(M(a,b))=\left|a^2-3b^2\right|$$

بين أن φ تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\times)$ — 0.5

3- لتكن $M(a,b)$ من E

أ) بين أن: $M(a,b)\times M(a,-b)=(a^2-3b^2).I$ — 0.25

ب) بين أنه إذا كانت $M(a,b)$ تقبل مقلوبا في $(E,\times)$ فإن : $\varphi(M(a,b))=1$ — 0.5

ج) نفترض أن $\varphi(M(a,b))=1$.

بين أن $M(a,b)$ تقبل مقلوبا في $(E,\times)$ و حدد مقلوبها. — 0.5

4- أ) بين أن: $\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2\;;\quad\varphi(M(a,b))=0\Leftrightarrow a=b=0$ — 0.25

ب) استنتج أن الحلقة $(E,+,\times)$ كاملة. — 0.25

ج) هل $(E,+,\times)$ جسم ؟ (علل جوابك). — 0.25

انتهى

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2022

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵏⴰⵣⵓⵔⵉ

NR 24	- عناصر الإجابة -	**I	SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS-SS

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4	المعامل	9
الشعبة والمسلك	مسلك العلوم الرياضية – أ و ب				

التمرين 1			عناصر الإجابة	سلم التنقيط
-A	-1		التحقق	0.25
	-2		الاستنتاج	0.25
-B	-1	أ)	f متصلة على اليمين في 0	0.5
		ب)	f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0	0.5
		ج)	• حساب النهاية .... • المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب للمنحنى جوار $+\infty$	0.25 0.25
	-2	أ)	حساب $f'(x)$	0.5
		ب)	• حساب $g'(x)$ .... • تأطير $g'(x)$	0.25 0.25
		ج)	تأطير $g(x)$	0.25
		د)	f تناقصية قطعا على I	0.25
	-3	أ)	جدول التغيرات	0.25
		ب)	التمثيل المبياني للمنحنى (C)	0.5
-C	-1		وجود و وحدانية $\alpha \in]0;1[$	0.25x2
	-2	أ)	جميع حدود المتتالية في $[0;1]$	0.5
		ب)	تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية أو متفاوتة التزايدات المنتهية.	0.5
		ج)	البرهنة على المتفاوتة بالترجع.	0.5
		د)	$\lim\limits_{n\to+\infty} \lvert u_n-\alpha\rvert=0$ إذن (u_n) تؤول إلى α	0.25
-D	-1		• F قابلة للاشتقاق على I .... • $(\forall x\in I)\ ;\ F'(x)=-f(x)$	0.25 0.25
	-2	أ)	المكاملة بالأجزاء.	0.5
		ب)	• $\lim\limits_{x\to0^+} F(x)=2\ln2-1$ .... • $\int_0^1 f(t)dt=F(0)=2\ln2-1$	0.25 0.25
		ج)	المساحة ب cm^2 هي: $\int_0^1 f(t)dt\times 4cm^2$	0.5
-E	**-1**	أ)	التحقق من المتفاوتة المزدوجة.	0.25
		ب)	تأطير S_n	0.5
	-2	أ)	المتتالية تزايدية	0.25
		ب)	تقارب المتتالية	0.25
		ج)	$S_1\le S_n\le\frac{1}{2}$ مع $S_1=\frac{3}{2}-2\ln2$	0.25

التمرين 2			عناصر الإجابة	سلم التنقيط
-I	-1		التحقق من $j^3 = 1$ .... التحقق من $1 + j + j^2 = 0$	0.25 0.25
	-2	أ)	$\Delta = \left[m(1-j)\right]^2$	0.25
		ب)	تحديد z_1 و z_2	0.25x2
	-3		$\left(z_1 + z_2\right)^{2022}$ تخيلي صرف	0.5
-II	-1		φ هو الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$	0.25
	-2	أ)	حساب a' و b' و c'	0.25x3
		ب)	$p + qj + rj^2 = 0$	0.25
		ج)	الاستنتاج	0.5

التمرين3		عناصر الإجابة	سلم التنقيط
-1	أ)	**p قاسم للعدد n**	0.25
	ب)	**إذا كان p يقسم أحدهما فإنه يقسم الآخر**	0.25
	ج)	**نطبق مبرهنة فيرما**	0.25
-2		$p = 2$	0.5
-3	أ)	**n و $p-1$ أوليان فيما بينهما ثم نطبق مبرهنة بوزو.**	0.5
	ب)	**التحقق**	0.25
	ج)	$v' \geq 0$	0.5
	د)	$(x+1)^{nr} \equiv (x+1)^{1+(p-1)v'}\ [p]$ و $(x)^{nr} \equiv (x)^{1+(p-1)v'}\ [p]$	0.5

التمرين4		عناصر الإجابة	سلم التنقيط
-1	أ)	**E زمرة جزئية للزمرة $\left(M_2(\mathbb{R}),+\right)$**	0.25
	ب)	**التحقق من المتساوية**	0.25
	ج)	**$(E,+,\times)$ حلقة...** **تبادلية و واحدية...**	0.25 0.25
-2		**φ تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$**	0.5
-3	أ)	**المتساوية**	0.25
	ب)	**الاستلزام**	0.5
	ج)	**$M(a,b)$ تقبل مقلوبا وتحديد المقلوب.**	0.25x2
-4	أ)	**التكافؤ**	0.25
	ب)	**الحلقة $(E,+,\times)$ كاملة**	0.25
	ج)	**التعليل على أن الحلقة الكاملة $(E,+,\times)$ ليست جسما.**	0.25