المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي
وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والإمتحانات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,0 ن)

نعتبر في $(\mathbb{N}^*)^2$ المعادلة (E) الآتية : $\boxed{(E) \ : \ x^2(x^2+7) = y(2x+y)}$

ليكن (x,y) عنصرا من $(\mathbb{N}^*)^2$ و ليكن δ القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y

نضع : $x = \delta a$ و $y = \delta b$

① نفترض أن (x,y) حل للمعادلة (E) .

0,50 ن — (أ) تحقق أن : $a^2(\delta^2 a^2 + 7) = b(2a+b)$

0,50 ن — (ب) إستنتج أنه يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث : $\delta^2 a^2 + 7 = kb$ و $2a + b = ka^2$

0,50 ن — (ج) بين أن : $a = 1$

0,75 ن — (د) إستنتج أن : $(b+1)^2 = \delta^2 + 8$

0,75 ن — ② حل في $(\mathbb{N}^*)^2$ المعادلة (E) .

التمرين الثاني : (3,5 ن)

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر المنحنى (E) الذي معادلته : $y = \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$

0,50 ن — ① (أ) بين أن (E) جزء من إهليلج يتم تحديده.

0,50 ن — (ب) أرسم المنحنى (E) .

0,75 ن — ② لتكن A و B النقطتين اللتين زوجا إحداثيتيهما على التوالي هما : $(4;0)$ و $(0;3)$

نعتبر النقطة M_1 من (E) التي أفصولها x_1 حيث x_1 ينتمي إلى المجال $[0;4]$.

نضع : $x_1 = 4\cos(t_1)$ حيث : $0 \leq t_1 \leq \frac{\pi}{2}$ و نعتبر التكامل الآتي : $I(x_1) = \frac{3}{4}\int_{x_1}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$

1,00 ن — (أ) باستعمال المكاملة بتغيير المتغير و ذلك بوضع $x = 4\cos(t)$ حيث : $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

بين أن : $I(x_1) = 6t_1 - 3\sin(2t_1)$

0,75 ن — (ب) لتكن $S(x_1)$ مساحة السطح المحصور بين المستقيمين (OA) و (OM_1) و المنحنى (E) .

و لتكن S مساحة السطح المحصور بين المستقيمين (OA) و (OB) و المنحنى (E)

0,25 ن — ب) تحقق أن أرتوب النقطة M_1 هو $3\sin(t_1)$

0,25 ن — ج) أحسب $S(x_1)$ بدلالة t_1 .

0,25 ن — د) إستنتج قيمة S .

0,25 ن — و) بين أن : $t_1 = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow S(x_1) = \frac{1}{2}S$

0,25 ن — هـ) حدد إحداثيتي M_1 في المعلم $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ في حالة : $t_1 = \frac{\pi}{4}$

التمرين الثالث : (4,5 ن)

الجزء الأول لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$ نعتبر المصفوفة : $M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

لتكن E مجموعة المصفوفات الآتية : $\boxed{E = \{M_{(a,b)} \ / \ (a,b)\epsilon\mathbb{R}^2\}}$

نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية.

0,75 ن — 1) بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$ و من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

0,25 ن — 2) بين أن : $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

0,50 ن — 3) أ) بين أن لكل عددين حقيقيين x و y لدينا : $(x=y=0) \Leftrightarrow (x^2+xy+y^2=0)$

0,25 ن — ب) حدد العناصر التي تقبل مقلوبا في الحلقة $(E,+,\times)$

0,50 ن — ج) إستنتج أن : $(E,+,\times)$ جسم تبادلي .

الجزء الثاني ليكن σ عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$.

0,25 ن — 1) بين أن $(1,\sigma)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C},+,\cdot)$

0,75 ن — 2) نعتبر التطبيق ψ المعرف من E نحو $\mathbb{C}$ بما يلي :

$$\boxed{\begin{array}{llll} \psi & : & E & \to \mathbb{C} \\ & & M_{(a,b)} & \to a+\sigma b \end{array}}$$

بين أن ψ تشاكل تقابلي من $(E,+)$ نحو $(\mathbb{C},+)$

0,75 ن — 3) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - z + 1 = 0$

حل في مجموعة الأعداد العقدية هذه المعادلة و اكتب حليها على الشكل المثلثي

0,50 ن — 4) نفترض في هذا السؤال أن : $\sigma = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

بين أن ψ تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$

التمرين الرابع : (9,0 ن)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{4\ln x}{x^2}-\dfrac{1}{2}$

(I) و ليكن $(\mathscr{C})$ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ وحدته : $\|\vec{\imath}\|=\|\vec{\jmath}\|=2\,cm$

0,50 ن — ① أحسب : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathscr{C})$

0,25 ن — ② (أ) بين أن : $\forall\, x \,\epsilon\,]0;+\infty[\ ;\ f'(x)=4\left(\dfrac{1-2\ln x}{x^3}\right)$

0,75 ن — (ب) إعط جدول تغيرات الدالة f .

0,75 ن — ③ بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين α و β بحيث : $1<\alpha<\sqrt{e}<\beta<3$

0,50 ن — ④ حدد معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة التي أفصولها 1

0,75 ن — ⑤ أرسم $(\mathscr{C})$

0,25 ن — **(II)** ① بين أن : $\forall\, t \,\epsilon\, [0;+\infty[\ ;\ 1-t\le\dfrac{1}{1+t}\le 1$

0,50 ن — ② استنتج أن : $\forall\, a \,\epsilon\, [0;+\infty[\ ;\ a-\dfrac{a^2}{2}\le\ln(1+a)\le a$

(III) لكل عدد صحيح n بحيث $n\ge 4$ نعتبر الدالة f_n المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $f_n(x)=\dfrac{n\,ln\,x}{x^2}-\dfrac{1}{2}$

و ليكن $(\mathscr{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة f_n في معلم متعامد ممنظم .

0,50 ن — ① أدرس تغيرات الدالة f_n .

0,50 ن — ② أدرس تقعر المنحنى $(\mathscr{C}_n)$ و بين أنه يقبل نقطة انعطاف أفصولها $e^{\frac{5}{6}}$

0,25 ن — ③ (أ) قارن $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$ حسب قيم x .

0,25 ن — (ب) استنتج الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathscr{C}_n)$ و $(\mathscr{C}_{n+1})$.

0,50 ن — ④ بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين u_n و v_n بحيث : $1<u_n<\sqrt{e}<v_n$

0,50 ن — ⑤ بين أن $(u_n)_{n\ge4}$ متتالية تناقصية قطعا مستعملا نتيجة السؤال ③

0,25 ن — ⑥ (أ) باستعمال $②(II)$ بين أن : $(\forall n\ge 4)\ ;\ \dfrac{(u_n-1)(3-u_n)}{2}\le\ln(u_n)\le u_n-1$

0,25 ن — (ب) استنتج أن : $(\forall n\ge 4)\ ;\ \dfrac{(u_n)^2}{2n}\le u_n-1\le\dfrac{(u_n)^2}{n(3-u_n)}$

0,25 ن — (ج) بين أن : $(\forall n\ge 4)\ ;\ \dfrac{1}{2n}\le u_n-1\le\dfrac{e}{n}$

0,50 ن — (د) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\ge4}$ متقاربة محددا نهايتها

0,50 ن — ⑦ (أ) بين أن : $(\forall n\ge 4)\ ;\ e^{\frac{5}{6}}<v_n$

0,50 ن — (ب) استنتج أن : $\lim\limits_{n\infty} v_n=+\infty$

التمرين الأول : (3,0 ن)

■ ① أ

لدينا (x,y) حل للمعادلة (E) .

$$\Leftrightarrow \quad x^2(x^2+7) = y(2x+y)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\delta a)^2((\delta a)^2+7) = (\delta b)(2\delta a+\delta b)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{a^2(\delta^2 a^2+7) = b(2a+b)} \ (*)$$

■ ① ب

لدينا : $x \wedge y = \delta$

$$\Leftrightarrow \quad \delta a \wedge \delta b = \delta$$

$$\Leftrightarrow \quad a \wedge b = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{a^2 \wedge b = 1} \quad (1)$$

و لدينا حسب النتيجة $(*)$: $b \,/\, a^2(\delta^2 a^2+7)$

و بما أن $a^2 \wedge b = 1$ وذلك حسب النتيجة (1)

فإنه حسب $(Gauss)$: $\boxed{b \,/\, (\delta^2 a^2+7)}$

و منه : $(\exists k \epsilon \mathbb{Z}) \ : \ (\delta^2 a^2+7) = kb$

في المعادلة $(*)$ نعوض التعبير $(\delta^2 a^2+7)$ بالتعبير kb نجد :

$$kba^2 = b(2a+b)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{ka^2 = (2a+b)}$$

■ ① ج

ننطلق من الكتابة : $ka^2 = 2a+b$

$$\Leftrightarrow \quad a(ka-2) = b$$

$$\Rightarrow \quad a \,/\, b$$

$$\Rightarrow \quad a \,/\, 1b$$

و بما أن : $a \wedge b = 1$ فإنه حسب $(Gauss)$: $\boxed{a \,/\, 1}$

و نعلم أن العدد الصحيح الطبيعي الوحيد الذي يقسم 1 هو 1 نفسه

و بالتالي : $\boxed{a = 1}$

■ ① د

نعوض a بالعدد 1 في المعادلة $(*)$ نجد : $\delta^2+7 = b(2+b)$

$$\Leftrightarrow \quad \delta^2+7 = b^2+2b$$

$$\Leftrightarrow \quad \delta^2+7+1 = b^2+2b+1$$

$$\Leftrightarrow \quad \delta^2+8 = (b+1)^2$$

■ ②

ننطلق من الكتابة : $(b+1)^2 = \delta^2+8$

$$\Leftrightarrow \quad (b+1)^2 - \delta^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow \quad (b+1-\delta)(b+1+\delta) = 8$$

نفصل هنا بين أربع حالات :

الحالة الأولى :

$$\begin{cases} b+1-\delta = -1 \\ b+1+\delta = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{-11}{2} \\ \delta = \dfrac{-7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-7}{2} \notin \mathbb{N} \\ y = \dfrac{77}{4} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} b+1-\delta = -8 \\ b+1+\delta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{-11}{2} \\ \delta = \dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{2} \notin \mathbb{N} \\ y = \dfrac{-77}{4} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

الحالة الثانية :

$$\begin{cases} b+1-\delta = 1 \\ b+1+\delta = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{7}{2} \\ \delta = \dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{2} \notin \mathbb{N} \\ y = \dfrac{49}{4} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} b+1-\delta = 8 \\ b+1+\delta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{7}{2} \\ \delta = \dfrac{-7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-7}{2} \notin \mathbb{N} \\ y = \dfrac{-49}{4} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

الحالة الثالثة :

$$\begin{cases} b+1-\delta = 2 \\ b+1+\delta = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ \delta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 1 \epsilon \mathbb{N} \\ y = 2 \epsilon \mathbb{N} \end{cases}}$$

أو

$$\begin{cases} b+1-\delta = 4 \\ b+1+\delta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ \delta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin \mathbb{N} \\ y = -2 \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

الحالة الرابعة :

$$\begin{cases} b+1-\delta = -2 \\ b+1+\delta = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ \delta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin \mathbb{N} \\ y = 4 \epsilon \mathbb{N} \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} b+1-\delta = -4 \\ b+1+\delta = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ \delta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \epsilon \mathbb{N} \\ y = -4 \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

نستنتج من هذه الدراسة أن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا في $(\mathbb{N}^*)^2$

و هو الزوج : $(x,y) = (1,2)$

<u>التمرين الثاني : (3,5 ن)</u>

■ ① أ

يكون التعبير $\sqrt{16-x^2}$ مُعَرَّفا إذا كان $16 - x^2 \geq 0$

و يبين الجدول التالي إشارة : $(16-x^2) = (4-x)(4+x)$

	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
$(4-x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$(4+x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(16-x^2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

يكون إذن التعبير $\sqrt{16-x^2}$ مُعَرَّفا إذا كان $x \in [-4;4]$

و لدينا : $y = \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2} \geq 0$

$$\Longrightarrow \quad y^2 = \frac{9}{16}(16-x^2)$$

$$\Longrightarrow \quad y^2 + \frac{9}{16}x^2 = 9$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

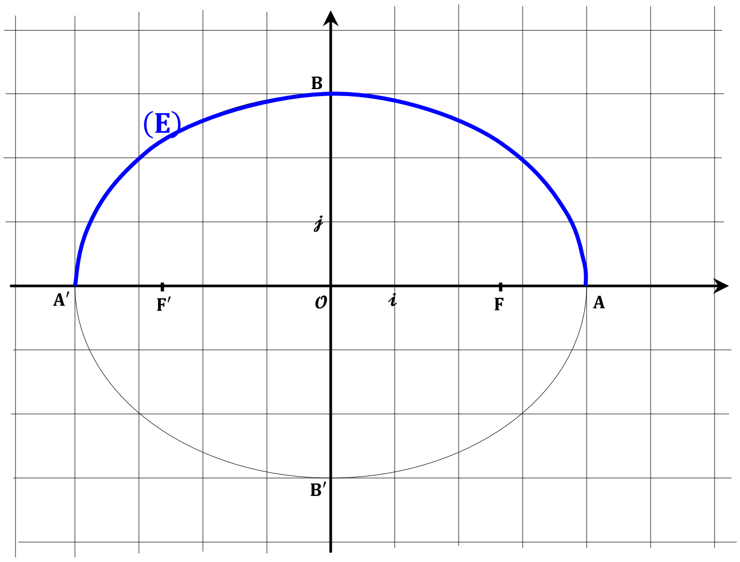
$$\Longrightarrow \quad \boxed{\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \quad ; \quad x \in [-4;4] \; ; \; y \geq 0}$$

إذن : (E) هو النصف العلوي للإهليلج الذي مركزه O

و رؤوسه $A(4,0)$ و $A'(-4,0)$ و $B(0,3)$ و $B'(0,-3)$

و بؤرتاه : $F\left(\sqrt{7};0\right)$ و $F'\left(-\sqrt{7};0\right)$

■ ① ب



■ ② أ

لدينا : $$I(x_1) = \frac{3}{4}\int_{x_1}^{4} \sqrt{16-x^2}\, dx$$

نضع : $x = 4\cos t$ إذن : $dx = -4\sin t \; dt$

إذا كان $x = x_1$ فإن : $t = t_1$ لأن : $x_1 = 4\cos t_1$

إذا كان $x = 4$ فإن : $t = 0$ لأن : $\left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$

إذن :

$$I(x_1) = \frac{3}{4}\int_{t_1}^{0} (4\sin t)(-4\sin t)\, dt = -12\int_{t_1}^{0} \sin^2 t\, dt$$

نعلم أن : $$\sin^2 t = \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)$$

و ذلك بإخطاط الدالة المثلثية $t \to \sin^2 t$

إذن : $$I(x_1) = -12\int_{t_1}^{0} \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) dt$$

$$\Leftrightarrow \quad I(x_1) = -12\left(\left[\frac{t}{2}\right]_{t_1}^{0} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2t}{2}\right]_{t_1}^{0}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad I(x_1) = -12\left(\frac{-t_1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{-\sin 2t_1}{2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{I(x_1) = 6t_1 - 3\sin 2t_1}$$

■ ② ب

لدينا M_1 نقطة من (E) و أفصولها x_1 .

إذن : أرتوبها y_1 يحقق ما يلي :

$$y_1 = \frac{3}{4}\sqrt{16-x_1^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad y_1 = \frac{3}{4}\sqrt{16-(4\cos t_1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad y_1 = \frac{3}{4}\sqrt{16(1-\cos^2 t_1)}$$

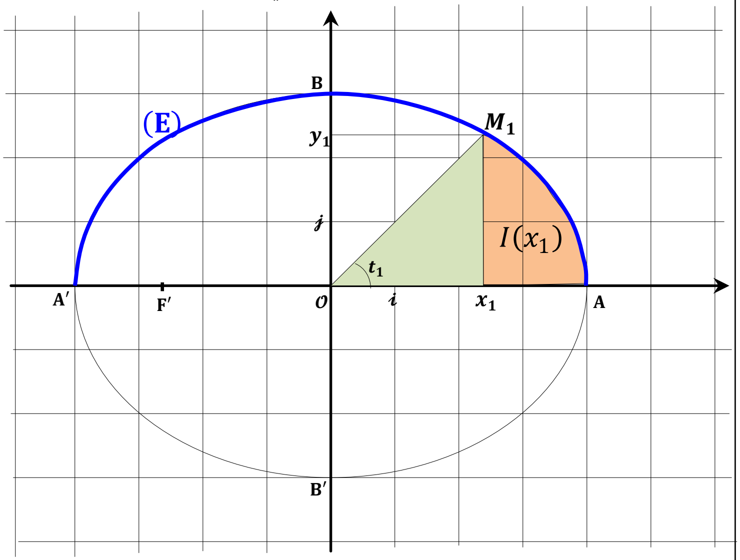
$$\Leftrightarrow \quad y_1 = \frac{3}{4}\sqrt{16\sin^2 t_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad y_1 = \frac{3}{4}\cdot 4\sin t_1$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{y_1 = 3\sin t_1}$$

■ ج ② ـــــ

نستعين بالشكل التالي :



لدينا حسب هذا الشكل : $\mathcal{S}(x_1) = \mathcal{S}(Ox_1M_1) + I(x_1)$

$$= \frac{x_1 \times y_1}{2} + I(x_1)$$

$$= \frac{4\cos(t_1) \times 3\sin(t_1)}{2} + I(x_1)$$

$$= 6\cos(t_1)\sin(t_1) + I(x_1)$$

$$= 3\sin(2t_1) + I(x_1)$$

$$= 3\sin(2t_1) + 6t_1 - 3\sin(2t_1)$$

$$= 6t_1$$

■ د ② ـــــ

لدينا : $\mathcal{S}(x_1) = 6t_1$

إذن : $\mathcal{S} = \mathcal{S}(0) = \frac{6\pi}{2} = 3\pi$

■ و ② ـــــ

$$\mathcal{S}(x_1) = \frac{1}{2}\mathcal{S}$$

$$\Leftrightarrow \quad 6t_1 = \frac{3\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad t_1 = \frac{\pi}{4}$$

■ هـ ② ـــــ

لدينا : $M_1 \begin{pmatrix} 4\cos t_1 \\ 3\sin t_1 \end{pmatrix}$

يعني : $\overrightarrow{OM_1} = 4\cos(t_1)\vec{i} + 3\sin(t_1)\vec{j}$

من أجل : $t_1 = \frac{\pi}{4}$ نحصل على : $\overrightarrow{OM_1} = 2\sqrt{2}\vec{i} + \frac{3}{2}\sqrt{2}\vec{j}$

ونعلم أن : $\vec{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$ و $\vec{j} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$.

إذن : $\overrightarrow{OM_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OB}$

و منه النقطة M_1 مُعَرَّفَة بالزوج : $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ في المعلم $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$

التمرين الثالث : (4,5 ن)

■ (I) ① ـــــ

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E

لدينا :

$$M(a,b) + M(c,d) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c+d & d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a+b)+(c+d) & -(b+d) \\ (b+d) & (a+c) \end{pmatrix}$$

$$= M\big((a+c),(b+d)\big) \in E$$

إذن : E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$

و لدينا كذلك :

$$M(a,b) \times M(c,d) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c+d & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (ac-bd)+(bc+ad+bd) & -(bc+ad+bd) \\ (bc+ad+bd) & (ac-bd) \end{pmatrix}$$

$$= M\big((ac-bd)\,;\,(bc+ad+bd)\big) \in E$$

إذن : E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

■ (I) ② ـــــ

لدينا E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$

إذن $+$ قانون تركيب داخلي في E .

و بما أن : $+$ تبادلي و تجميعي في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

فإن $+$ تبادلي و تجميعي في E .

و بما أن $M(0,0)$ هو العنصر المحايد لِـ $+$ في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

فإن : $M(0,0)$ هو العنصر المحايد لِـ $+$ في E .

و لدينا :

$$M(a,b)+M(-a,-b)=M(-a,-b)+M(a,b)=M(0,0)$$

إذن كل مصفوفة $M(a,b)$ من E تقبل مماثلة $M(-a,-b)$ بالنسبة لـ $+$

و بالتالي : $\boxed{(E,+)\ \text{زمرة تبادلية .}}$ (1)

بما أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية .

و بما أن : E جزء من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

فإن : $\times$ تجميعي و توزيعي على $+$ في E . (2)

و لدينا : $M(a,c)\times M(1,0)=M(a,c)$

و : $M(1,0)\times M(a,c)=M(a,c)$

إذن $M(1,0)$ هو العنصر المحايد لـِ $\times$ في E . (3)

و لدينا :

$$M(a,b)\times M(c,d)=M\big((ac-bd)\,;\,(bc+ad+bd)\big)$$
$$=M(c,d)\times M(a,b)$$

و منه : $\times$ تبادلي في E . (4)

من النتائج (1) و (2) و (3) و (4) نستنتج أن :

$(E,+,\times)$ حلقة واحدية تبادلية.

■ (I)③أ

ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث : $x^2+xy+y^2=0$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}x^2+xy+y^2-xy=-xy\\ x^2+xy+y^2+xy=xy\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}x^2+y^2=-xy\geq 0\\ (x+y)^2=xy\geq 0\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\quad xy=0$$

$$\Longrightarrow\quad \boxed{x^2+y^2=0}$$

إذن : $M\binom{x}{y}$ نقطة من الدائرة $(\mathscr{C})$ التي مركزها O و شعاعها 0

و لإيقاف هذا العبث المبين نقول : $\boxed{x=y=0}$

عكسيا : إذا كان $x=y=0$ فإن : $x^2+xy+y^2=0$

و بالتالي :

$$\boxed{\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\quad;\quad (x^2+xy+y^2)\Leftrightarrow(x=y=0)}$$

■ (I)③ب

لدينا : $M(a,b)=\begin{pmatrix}a+b & -b\\ b & a\end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow\ \det M(a,b)=a^2+ab+b^2$$

إذن : تكون المصفوفة $M(a,b)$ قابلة للقلب إذا كان $a^2+ab+b^2\neq 0$

يعني : $a\neq 0$ أو $b\neq 0$

و بالتالي : جميع عناصر المجموعة $E\setminus\{M(0,0)\}$ قابلة للقلب .

و لدينا :

$$\big(M(a,b)\big)^{-1}=\frac{1}{a^2+ab+b^2}\begin{pmatrix}a & b\\ -b & (a+b)\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{a^2+ab+b^2}\begin{pmatrix}(a+b)+(-b) & -(-b)\\ (-b) & (a+b)\end{pmatrix}$$
$$=M\left(\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}\ ;\ \frac{-b}{a^2+ab+b^2}\right)$$

■ (I)③ج

نعتبر المجموعة $(E\setminus\{M(0,0)\}\,;\times)$

لدينا : $\times$ قانون تركيب داخلي في $E\setminus\{M(0,0)\}$

لأن : E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

و لدينا : $M(1,0)$ هو العنصر المحايد لـِ $\times$ في $E\setminus\{M(0,0)\}$

و كل عنصر يقبل مماثلا(مقلوبا) في $E\setminus\{M(0,0)\}$

إذن : $(E\setminus\{M(0,0)\}\,;\times)$ زمرة. (5)

و نعلم أن : $(E,+)$ زمرة تبادلية (6)

و نعلم كذلك أن $\times$ تبادلي و توزيعي على $+$ في $E\setminus\{M(0,0)\}$ (7)

إذن من النتائج (5) و (6) و (7) نستنتج أن : $(E,+,\times)$ جسم تبادلي

■ (II)①

ليكن σ عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$

إذن : $(\exists\sigma_1\in\mathbb{R})\,,(\exists\sigma_2\in\mathbb{R}^*)\quad;\quad \sigma=\sigma_1+i\sigma_2$

ليكن $z=x+iy$ عددا عقديا .

نضع : $z=m_1+m_2\sigma$

$$\Longrightarrow\quad z=m_1+m_2(\sigma_1+i\sigma_2)$$
$$\Longrightarrow\quad z=m_1+m_2\sigma_1+im_2\sigma_2$$

بما أن : $z=x+iy$ فإن : $\begin{cases}x=m_1+m_2\sigma_1\\ y=m_2\sigma_2\end{cases}$

و منه : $\begin{cases}m_1=\left(x-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}y\right)\in\mathbb{R}\\ m_2=\left(\frac{y}{\sigma_2}\right)\in\mathbb{R}\end{cases}$

يعني : $(\forall z\epsilon\mathbb{C}),(\exists(m_1,m_2)\epsilon\mathbb{R}^2)\ ;\ z=m_1+m_2\sigma$

إذن $\boxed{\{1;\sigma\}\ \text{أسرة مولدة لـ}\ \mathbb{C}\ .}$ (8)

لتكن $x+\sigma y$ تأليفة خطية منعدمة لِـ 1 و σ يعني : $x+\sigma y=0$

$$\Leftrightarrow\quad x+y(\sigma_1+i\sigma_2)=0$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}x+y\sigma_1=0\\ \sigma_2 y=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$$

إذن $\boxed{\{1;\sigma\}\ \text{أسرة حرة}}$ (9)

من (8) و (9) نستنتج أن $\{1;\sigma\}$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

■ (II) (2)

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E

لدينا : $\psi\big(M(a,b)+M(c,d)\big)=\psi\big(M(a+c\,;b+d)\big)$

$$=(a+c)+\sigma(b+d)$$
$$=(a+\sigma b)+(c+\sigma d)$$
$$=\psi\big(M(a,b)\big)+\psi\big(M(c,d)\big)$$

إذن ψ تشاكل من $(E,+)$ نحو $(\mathbb{C},+)$

ليكن $(a+\sigma b)$ عنصرا من $\mathbb{C}$.

لنحل المعادلة $\psi\big(M(x,y)\big)=a+\sigma b$ ذات المجهول $M(x,y)$ في E

لدينا : $\psi\big(M(x,y)\big)=a+\sigma b$

$$\Leftrightarrow\quad x+\sigma y=a+\sigma b$$

بما أن $(1,\sigma)$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{C},+,\cdot)$

فإن كل عدد عقدي يكتب بكيفية وحيدة على شكل تأليفة خطية للعنصرين 1 و σ

إذن : $\begin{cases}x=a\\ y=b\end{cases}$

و بالتالي :

$$(\forall(a+\sigma b)\epsilon\mathbb{C})\ ;\ \exists!\,M(x,y)\ \epsilon\ E\quad:\quad\psi\big(M(x,y)\big)=(a+\sigma b)$$

و منه : ψ تقابل من $(E,+)$ نحو $(\mathbb{C},+)$

$\boxed{\text{و بالتالي}\ \psi\ \text{تشاكل تقابلي من}\ (E,+)\ \text{نحو}\ (\mathbb{C},+)}$

■ (II) (3)

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-z+1=0$

لدينا : $\Delta=\left(i\sqrt{3}\right)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين :

$$z_2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=e^{\left(\frac{i\pi}{3}\right)}$$

و

$$z_1=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)=e^{\left(\frac{-i\pi}{3}\right)}$$

■ (II) (4)

لدينا : $\sigma=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن : $\sigma^2+1=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1$

$$=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1$$
$$=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\ \sigma$$

إذن : $\boxed{\sigma^2+1=\sigma}$

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E

لدينا : $\psi\big(M(a,b)\times M(c,d)\big)=\psi\big(M(ac-bd\,;bc+ad+bd)\big)$

$$=(ac-bd)+\sigma(bc+ad+bd)$$

و لدينا من جهة أخرى :

$$\psi\big(M(a,b)\big)\times\psi\big(M(c,d)\big)=(a+\sigma b)\times(c+\sigma d)$$
$$=ac+ad\sigma+bc\sigma+\sigma^2bd$$
$$=ac+ad\sigma+bc\sigma+(\sigma-1)bd$$
$$=ac+ad\sigma+bc\sigma+bd\sigma-bd$$
$$=\boxed{(ac-bd)+\sigma(bc+ad+bd)}$$

نستنتج إذن أن :

$$\psi\big(M(a,b)\times M(c,d)\big)=\psi\big(M(a,b)\big)\times\psi\big(M(c,d)\big)$$

و بالتالي : $\boxed{\psi\ \text{تشاكل من}\ (E,\times)\ \text{نحو}\ (\mathbb{C},\times)}$

التمرين الرابع : (9,0 ن)

■ (I) (1)

لدينا : $$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\underbrace{\left(\frac{4}{x}\right)}_{+\infty}\underbrace{\left(\frac{\ln x}{x}\right)}_{-\infty}-\frac{1}{2}=\boxed{-\infty}$$

إذن محور الأراتيب مقارب عمودي لِـ $(\mathscr{C})$

و لدينا : $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\left(\frac{4}{x}\right)}_{0^+}\underbrace{\left(\frac{\ln x}{x}\right)}_{0^+}-\frac{1}{2}=\boxed{\frac{-1}{2}}$$

إذن المستقيم $y=\frac{-1}{2}$ مقارب أفقي بجوار $+\infty$.

■ (I) (2) (أ)

f دالة قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ لأنها عبارة عن تشكيلة من الدوال المعرفة و القابلة للأشتقاق على $]0;+\infty[$

ليكن x عنصرا من $]0;+\infty[$

لدينا : $$f'(x)=4\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)'=\frac{4(x-2x\ln x)}{x^4}=\frac{4(1-2\ln x)}{x^3}$$

■ (I) (2) ب

لدينا : $\forall x \in]0;+\infty[\quad ; \quad f'(x)=\dfrac{4(1-2\ln x)}{x^3}$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1-2\ln x)$

إذا كان : $x=\sqrt{e}$ فإن : $f'(x)=0$

إذا كان : $x>\sqrt{e}$ فإن : $f'(x)<0$

إذا كان : $x<\sqrt{e}$ فإن : $f'(x)>0$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	$\frac{2}{e}-\frac{1}{2}$	↘	$\frac{-1}{2}$

■ (I) (3)

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f :

f دالة متصلة و تزايدية قطعا على $]0;\sqrt{e}[$

إذن f تقابل من أي مجال I ضمن $]0;\sqrt{e}[$ نحو صورته $f(I)$.

إذن : f تقابل من المجال $]1;\sqrt{e}[$ نحو $]f(1);f(\sqrt{e})[$

أي f تقابل من $]1;\sqrt{e}[$ نحو $]-0{,}5\,;0{,}2[$

و بما أن : $0 \in]-0{,}5\,;0{,}2[$ فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا α في المجال $]1;\sqrt{e}[$ بالتقابل f

أي : $\boxed{\exists!\ \alpha \in]1;\sqrt{e}[\ ;\ f(\alpha)=0}$ (1)

<u>و بنفس الطريقة :</u>

لدينا f دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $]\sqrt{e}\,;+\infty[$

إذن f تقابل من أي مجال J ضمن $]\sqrt{e}\,;+\infty[$ نحو صورته $f(J)$

أي f تقابل من المجال $]\sqrt{e}\,;3[$ نحو المجال $]f(3)\,;f(\sqrt{e})[$

أي f تقابل من $]\sqrt{e}\,;3[$ نحو $]-0{,}01\,;\,0{,}2[$

و بما أن $0 \in]-0{,}01\,;\,0{,}2[$ فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا β في المجال $]\sqrt{e}\,;3[$ بالتقابل f

أي : $\boxed{\exists!\ \beta \in]\sqrt{e}\,;3[\ \ ;\ f(\beta)=0}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن المعادلة : $f(x)=0$ تقبل حلين مختلفين α و β

بحيث : $\boxed{1<\alpha<\sqrt{e}<\beta<3}$

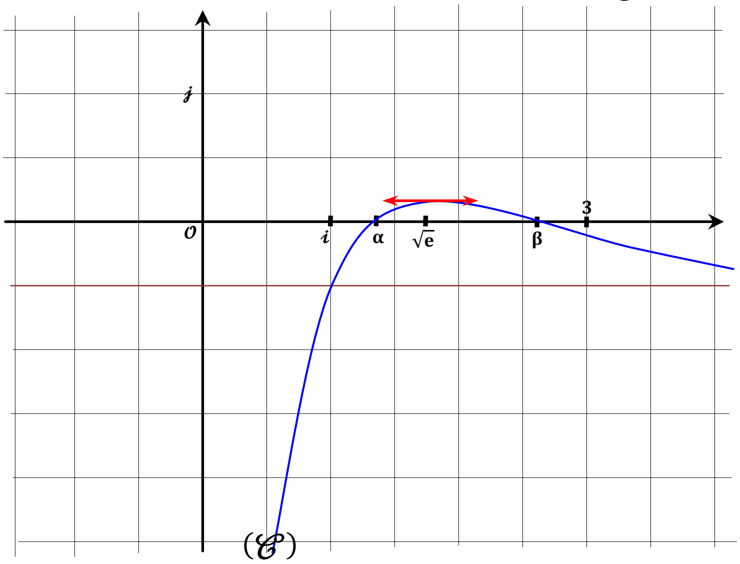
■ (I) (4)

معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة ذات الأفصول 1 يكتب على شكل :

$$\begin{aligned}(T): y &= f'(1)(x-1)+f(1)\\ &= 4(x-1)+\left(\frac{-1}{2}\right)\\ &= 4x-\frac{9}{2}\end{aligned}$$

و بالتالي : $(T): y=4x-\frac{9}{2}$

■ (I) (5)



■ (II) (1)

ليكن $t\geq 0$ إذن : $-t^2\leq 0$ ومنه : $1-t^2\leq 1$

أي : $(1-t)(1+t)\leq 1$

نضرب كلا الطرفين في العدد الموجب $\left(\frac{1}{1+t}\right)$ نحصل على :

(1) $\boxed{1-t\leq \dfrac{1}{1+t}}$

و لدينا كذلك $1+t\geq 1$ إذن : $\boxed{\dfrac{1}{1+t}\leq 1}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\boxed{\forall t\in[0;+\infty[\ \ ;\ \ 1-t\leq \frac{1}{1+t}\leq 1}$$

■ (II) (2)

ليكن a عنصرا من $[0;+\infty[$

لدينا : $\forall t\in[0;+\infty[\ \ ;\ \ 1-t\leq \dfrac{1}{1+t}\leq 1$

$$\Rightarrow \int_0^a (1-t)\,dt \leq \int_0^a \left(\frac{1}{1+t}\right)dt \leq \int_0^a 1\,dt$$

$$\Rightarrow \left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^a \leq [\ln(1+t)]_0^a \leq [t]_0^a$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(a-\frac{a^2}{2}\right)\leq \ln(1+a)\leq a}$$

■(III) ①

لدينا f_n دالة قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$

لأنها تضم تركيبة من الدوال الاعتيادية القابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

ليكن x عنصرا من $]0;+\infty[$

$$f_n'(x) = n\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' = \frac{n(1-2\ln x)}{x^3}$$

بما أن : $\forall\ x>0\ ;\ \frac{n}{x^3} \geq 0$

فإن إشارة $f_n'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1-2\ln x)$

نستنتج إذن الجدول التالي :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{n}{2e}-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{-1}{2}$

■(III) ②

دراسة التقعر و نقط الانعطاف يستدعي حساب المشتقة الثانية لـ f_n

$$f_n''(x) = \frac{x^3\left(\frac{-2n}{x}\right) - 3x^2 n(1-2\ln x)}{x^6}$$

$$\Leftrightarrow \quad f_n''(x) = \frac{n(6\ln x - 5)}{x^4}$$

إذن $f_n''(x)$ تنعدم إذا كان $(6\ln x - 5) = 0$

يعني : $\ln x = \frac{5}{6}$ أي : $x = e^{\frac{5}{6}}$

إذا كان $x > e^{\frac{5}{6}}$ فإن : $(6\ln x - 5) > 0$ و منه : $f''(x) > 0$

إذا كان $x < e^{\frac{5}{6}}$ فإن : $(6\ln x - 5) < 0$ و منه : $f''(x) < 0$

نلاحظ أن $f_n''(x)$ تنعدم في النقطة ذات الأفصول $e^{\frac{5}{6}}$ و تغير إشارتها بجوار تلك النقطة

إذن $(\mathscr{C}_n)$ يقبل نقطة انعطاف و هي : $\left(e^{\frac{5}{6}}\ ;\ \frac{5n}{6}e^{\frac{-5}{3}} - \frac{1}{2}\right)$

■(III) ③ أ

لدينا : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

إذا كان $x = 0$ فإن $f_{n+1}(x) = f_n(x)$

إذا كان $x > 1$ فإن $f_{n+1}(x) > f_n(x)$

إذا كان $x < 1$ فإن $f_{n+1}(x) < f_n(x)$

■(III) ③ ب

x	0		1		$+\infty$
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$		$-$	0	$+$	
$(\mathscr{C}_n)$ و $(\mathscr{C}_{n+1})$		$(\mathscr{C}_n)$ أسفل $(\mathscr{C}_{n+1})$	$(\mathscr{C}_n)$ و $(\mathscr{C}_{n+1})$ يتقاطعان	$(\mathscr{C}_{n+1})$ فوق $(\mathscr{C}_n)$	

■(III) ④

لدينا f_n دالة تزايدية قطعا على $]0;\sqrt{e}[$

إذن f_n تقابل من أي مجال I ضمن $]0;\sqrt{e}[$ نحو صورته $f_n(I)$

و منه f_n تقابل من $]1;\sqrt{e}[$ نحو $]-0,5\ ;0,2[$

و بما أن : $0\ \epsilon\ ]-0,5\ ;0,2[$ فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا u_n من $]1\ ;\sqrt{e}[$.

يعني : $\boxed{\exists!\ u_n\ \epsilon\ ]1;\sqrt{e}[\ \ ;\ \ f_n(u_n) = 0}$ (1)

<u>و بنفس الطريقة :</u> لدينا f_n تناقصية قطعا على $]\sqrt{e}\ ;\ +\infty[$

إذن f_n تقابل من أي مجال J ضمن $]\sqrt{e}\ ;\ +\infty[$ نحو صورته $f_n(J)$

و منه : f_n تقابل من $]\sqrt{e}\ ;n[$ نحو $]f_n(n)\ ;0,2[$

و بما أن $0\ \epsilon\ ]f_n(n)\ ;0,2[$ لأن $\frac{\ln n}{n} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$; $(\forall n \epsilon \mathbb{N})$

فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا v_n من $]\sqrt{e}\ ;n[$

يعني : $\boxed{\exists!\ v_n > \sqrt{e}\ \ ;\ \ f_n(v_n) = 0}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين

u_n و v_n بحيث : $1 < u_n < \sqrt{e} < v_n$

■(III) ⑤

لدينا : $1 < u_n < \sqrt{e}$ إذن حسب (III)③: $f_{n+1}(u_n) > f_n(u_n)$

و نعلم أن : $f_{n+1}(u_{n+1}) = f_n(u_n) = 0$

إذن : $f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$

و بما أن f_{n+1} دالة تزايدية على $]1\ ;\sqrt{e}[$ فإن : $u_n > u_{n+1}$

و بالتالي : $(u_n)_{n\geq 4}$ متتالية تناقصية قطعا .

■(III) ⑥ أ

لدينا : $\forall\ a\ \epsilon\ [0\ ;\ +\infty[\ ;\ a - \frac{a^2}{2} \leq \ln(1+a) \leq a$

و لدينا : $u_n > 1$ إذن : $u_n - 1 > 0$

و منه : $(u_n - 1) - \frac{1}{2}(u_n - 1)^2 \leq \ln(u_n) \leq (u_n - 1)$

$$\Leftrightarrow (\forall n \geq 4)\ ;\ \frac{2(u_n-1) - (u_n-1)^2}{2} \leq \ln(u_n) \leq (u_n - 1)$$

$$\Leftrightarrow (\forall n \geq 4)\ \ ;\ \ \frac{(u_n-1)(2-u_{n+1})}{2} \leq \ln(u_n) \leq (u_n - 1)$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{(\forall n \geq 4) \;;\; \frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \leq \ln(u_n) \leq (u_n-1)} \quad (*)$$

■(III) 6 ب

ونعلم أن : $f_n(u_n)=0$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{n\ln(u_n)}{(u_n)^2}=\frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \ln(u_n)=\frac{(u_n)^2}{2n}$$

ننطلق إذن من الشق الأول من التأطير $(*)$: $\ln(u_n) \leq u_n - 1$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\frac{(u_n)^2}{2n} \leq u_n - 1} \; (7)$$

و لدينا كذلك حسب الشق الثاني من التأطير $(*)$:

$$\frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \leq \ln(u_n)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \leq \frac{(u_n)^2}{2n}$$

$$\Longleftrightarrow \quad (u_n-1) \leq \frac{2(u_n)^2}{2n(3-u_n)}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{(u_n-1) \leq \frac{(u_n)^2}{n(3-u_n)}} \; (8)$$

من (7) و (8) نحصل على التأطير (9) التالي :

$$(9) \; \boxed{(\forall n \geq 4) \;;\; \frac{(u_n)^2}{2n} \leq (u_n-1) \leq \frac{(u_n)^2}{n(3-u_n)}}$$

■(III) 6 ج

لدينا $u_n < \sqrt{e}$ إذن : $\boxed{\frac{(u_n)^2}{2n} < \frac{e}{2n}}$ (10)

و $3-u_n > 3-\sqrt{e}$

إذن : $\boxed{\frac{1}{3-u_n} < \frac{1}{3-\sqrt{e}} < 1}$ (11)

من (10) و (11) نستنتج أن : $\frac{(u_n)^2}{(3-u_n)} < e$

و منه : $\boxed{\frac{(u_n)^2}{n(3-u_n)} < \frac{e}{n}}$ (12)

من (9) و (10) و (12) نستنتج أن :

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{(u_n)^2}{2n} \leq (u_n-1) \leq \frac{(u_n)^2}{n(3-u_n)} \leq \frac{e}{n}$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n \geq 4) \;;\; \frac{1}{2n} \leq (u_n-1) \leq \frac{e}{n}}$

■(III) 6 د

لدينا : $\frac{1}{2n} \leq (u_n-1) \leq \frac{e}{n}$

$$\frac{1}{2n} \xrightarrow{+\infty} 0 \qquad \frac{e}{n} \xrightarrow{+\infty} 0$$

إذن : $\lim_{n\infty}(u_n-1)=0$ أي : $\boxed{\lim_{n\infty} u_n = 1}$

■(III) 7 أ

لدينا : $n \geq 4$

$$\Longrightarrow \quad \frac{5n}{6}e^{\frac{-5}{3}} \geq \frac{20}{6}e^{\frac{-5}{3}}$$

باستعمال الآلة الحاسبة لدينا : $\frac{20}{6}e^{\frac{-5}{3}} \approx 0{,}63 > 0{,}5$

$$\Longrightarrow \quad \frac{20}{6}e^{\frac{-5}{3}} > \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{5n}{6}e^{\frac{-5}{3}} \geq \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{5n}{6}e^{\frac{-5}{3}} - \frac{1}{2} \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad f_n\left(e^{\frac{5}{6}}\right) \geq f_n(v_n)$$

و بما أن f_n دالة تناقصية على المجال $]\sqrt{e}\,;+\infty[$

فإن : $\boxed{e^{\frac{5}{6}} \leq v_n}$

■(III) 7 ب

لدينا : $f_n(v_n)=0$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{n\ln(v_n)}{(v_n)^2}=\frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\ln(v_n)=\frac{(v_n)^2}{2n}} \quad (*)$$

و لدينا : $v_n > e^{\frac{5}{6}}$ إذن : $\ln(v_n) > \frac{5}{6}$

و منه باستعمال $(*)$ نجد : $\frac{(v_n)^2}{2n} > \frac{5}{6}$

$$\Longleftrightarrow \quad (v_n)^2 > \frac{10}{6}n$$

$$\Longleftrightarrow \quad v_n > \sqrt{\frac{10n}{6}}$$

بما أن : $\lim_{n\infty}\sqrt{\frac{10n}{6}}=+\infty$

فإن : $\boxed{\lim_{n\infty} v_n = +\infty}$