الإمتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة الاستدراكية 2006

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 10
مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (2,0 ن)

نوزع بطريقة عشوائية أربع كرات غير قابلة للتمييز باللمس و مرقمة 1 و 2 و 3 و 4 على ستة أشخاص A و B و C و D و E و F ،(كل شخص يمكنه أن يحصل على 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 كرات)

0,50 ن — ① ما هو عدد إمكانيات توزيع الكرات الأربع على الأشخاص الستة ؟

0,50 ن — ② أحسب احتمال أن يحصل الشخص A على كرة واحدة على الأقل .

1,00 ن — ③ أحسب احتمال الحدث التالي : " مجموع عددي الكرات المحصل عليها من طرف الشخصين B و C يساوي عدد الكرات المحصل عليها من طرف الشخص A .

التمرين الثاني : (4,0 ن)

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر التطبيق f المعرف من $\mathbb{C}$ نحو $\mathbb{C}$ بما يلي :

$$f(z)=\frac{1}{6}\left((1+i\sqrt{3})z+2\bar{z}\right)$$

0,50 ن — **(I)** حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $f(z)=0$.

(II) نضع $z_0=1$ و $z_{n+1}=f(z_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$ و نرمز بـ u_n لمعيار العدد العقدي z_n .

0,50 ن — ① (أ) بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 0\leq u_{n+1}\leq\frac{2}{3}u_n$

0,50 ن — (ب) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة و احسب نهايتها .

② لكل n من $\mathbb{N}$ نضع : $\mathcal{S}_n=\sum_{k=0}^{n}OM_k=OM_1+\cdots+OM_n$

و لكل k من $\mathbb{N}$ نعتبر M_k صورة العدد العقدي z_k .

0,50 ن — (أ) بين أن $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \mathcal{S}_n\leq3$.

0,50 ن — (ب) بين أن المتتالية $(\mathcal{S}_n)_{n\geq0}$ متقاربة (حساب نهاية $(\mathcal{S}_n)_{n\geq0}$ غير مطلوب)

(III) نضع $z=re^{i\theta}$ حيث $\theta]-\pi,\pi]$ و $r\epsilon\mathbb{R}_+^*$.

1,00 ن — ① بين أن : $f(z)=\frac{2}{3}r\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)e^{\frac{i\pi}{6}}$

0,50 ن — ② بين أن النقط M_1 و M_2 و ..... و M_n مستقيمية $(n\epsilon\mathbb{N}^*)$.

التمرين الثالث : (3,5 ن)

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

ليكن (Γ) المنحنى الذي معادلته $2y^2-4y-7x=0$.

0,75 ن — **(I)** ① بين أن (Γ) شلجم و حدد رأسه و بؤرتيه.

0,25 ن — ② أنشىء المنحنى (Γ) في المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

(II) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E)\ :\ 2(y-1)^2=7x+2$.

1,00 ن — ① (أ) بين أن : $y\equiv 0[7]$ أو $y\equiv 2[7]$.

0,50 ن — (ب) استنتج أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$S=\{(14K^2-4k\ ;\ 7k)\ /\ k\epsilon\mathbb{Z}\}\cup\{(14k^2+4k\ ;\ 7k+2)\ /\ k\epsilon\mathbb{Z}\}$$

1,00 ن — ② حدد النقط $M(x,y)$ من المنحنى (Γ) بحيث : $(x,y)\epsilon\mathbb{Z}^2$ و $x\wedge y=9$.

التمرين الرابع : (3,0 ن)

0,25 ن — ① بين أن :
$$(\forall t\epsilon\mathbb{R})\ ;\ \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}=\frac{t}{(1+t^2)}-\frac{t}{(3+t^2)}+\frac{1}{(3+t^2)}$$

0,50 ن — ② بين أن :
$$(\forall\alpha\epsilon\mathbb{R})\ ;\ \int_0^{\alpha}\frac{1}{(3+t^2)}dt=\frac{1}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right)$$

③ نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0,\pi]$ بما يلي :
$$\boxed{F(x)=\int_0^x\frac{1+\sin u}{2+\cos u}du}$$

0,50 ن — (أ) بين أن F قابلة للإشتقاق على $[0,\pi]$.

0,50 ن — (ب) باستعمال مكاملة بتغيير المتغير $t=\tan\left(\frac{u}{2}\right)$ بين أن :

$$(\forall x\epsilon[0,\pi[)\ ;\ F(x)=2\int_0^{\tan\frac{\pi}{2}}\frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}dt$$

نذكر أن : $\cos u=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ و $\sin u=\frac{2t}{1+t^2}$: حيث $t=\tan\frac{u}{2}$ و $u\epsilon[0,\pi[$

0,75 ن — (ج) باستعمال السؤالين ① و ② بين أن:

$$(\forall x\epsilon[0,\pi[)\ ;\ F(x)=\ln 3+\frac{2}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)+\ln\left(\frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{3+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

0,50 ن — (د) باستعمال اتصال الدالة F بين أن :
$$\int_0^{\pi}\frac{1+\sin u}{2+\cos u}du=\ln 3+\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

التمرين الخامس : (3,0 ن)

في هذا التمرين n يرمز لعدد صحيح طبيعي أكبر أو يساوي 2

نعتبر f_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\boxed{f_n(x) = \dfrac{x}{n} - e^{-nx}}$

ليكن $(\mathscr{C}_n)$ التمثيل المبياني للدالة f_n في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

① أ) أحسب : $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$	0,50 ن
ب) أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathscr{C}_n)$.	0,75 ن
② أحسب $f_n'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f_n .	0,75 ن
③ أ) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}$.	0,50 ن
ب) بين أن : $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) < 0$	0,25 ن
ج) بين أن $e^x \geq x + 1 \; ; \; (\forall x \epsilon \mathbb{R})$ ثم استنتج أن $f_n(1) > 0$.	0,75 ن
د) بين أن : $\dfrac{1}{n} < \alpha_n < 1$	0,50 ن
④ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_2)$ (نأخذ : $\alpha_2 \approx 0{,}6$)	0,50 ن
⑤ أ) بين أن $(\forall n \epsilon \mathbb{N})$ بحيث $n \geq 2$ لدينا : $f_{n+1}(\alpha_n) = \dfrac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)}\left(e^{\alpha_n} - \dfrac{1}{n} - 1\right)$	0,50 ن
ب) استنتج أن : $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0 \; ; \; (\forall n \epsilon \mathbb{N}^* - \{1\})$	0,50 ن
ج) بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة .	0,75 ن
⑥ أ) باستعمال السؤال ③ بين أن : $\dfrac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \dfrac{1}{n} \; ; \; (\forall n \epsilon \mathbb{N}^* - \{1\})$	0,50 ن
ب) استنتج أن : $\dfrac{\ln n}{n} < \alpha_n < \dfrac{2\ln n}{n} \; ; \; (\forall\, n \,\epsilon\, \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$	0,50 ن
ج) حدد : $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$	0,25 ن

التمرين الأول : (2,0 ن)

①

توزيع أربع كرات مرقمة على 6 أشخاص يمكن أن يتم بخمس طرق مختلفة :

الطريقة الأولى : إعطاء شخص واحد الكرات الأربع.

الطريقة الثانية : إعطاء شخص واحد الكرة الأولى ثم نعطي الشخص الثاني الكرات الثلاث المتبقية.

الطريقة الثالثة : إعطاء شخص واحد كرتين و شخص ثاني كرتين.

الطريقة الرابعة : إعطاء شخص واحد كرة واحدة و شخص ثاني كرة واحدة و شخص ثالث كرتين.

الطريقة الخامسة : نعطي كل شخص كرة واحدة .

في الطريقة الأولى لدينا :

- C_6^1 إمكانية لاختيار الشخص الذي سنعطيه الكرات الأربع .

في الطريقة الثانية لدينا :

- C_6^1 إمكانية لاختيار الشخص الذي سنعطيه كرة واحدة
- و C_4^1 إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيها إياه
- و C_5^1 إمكانية لاختيار الشخص الذي سنعطيه الكرات الثلاث المتبقية.

في الطريقة الثالثة لدينا :

- C_6^1 إمكانية لاختيار الشخص الذي سنعطيه الكرتين
- و C_4^2 إمكانية لاختيار الكرتين.
- و C_5^1 إمكانية لاختيار الشخص الآخر صاحب الكرتين المتبقيتين.

في الطريقة الرابعة لدينا :

- C_6^1 إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الأولى.
- و C_4^1 إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.
- و C_5^1 إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الثانية.
- و C_3^1 إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.
- و C_4^1 إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرتين المتبقيتين.

في الطريقة الرابعة لدينا :

- C_6^1 إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الأولى.
- و C_4^1 إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.
- و C_5^1 إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الثانية.
- و C_3^1 إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.
- C_4^1 إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الثالثة.
- و C_2^1 إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.
- C_3^1 إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الرابعة.
- و C_1^1 إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.

التطبيق العددي :

الطريقة :	ط 1	ط 2	ط 3	ط 4	ط 5
عدد الإمكانيات	6	120	180	1440	8640

و بالتالي : عدد الإمكانيات لتوزيع الكرات الأربع على الأشخاص الستة هو :

$$6 + 120 + 180 + 1440 + 8640 = \boxed{10386}$$

②

الشخص A يمكنه أن يحصل على :

- كرة واحدة بـ C_4^1 إمكانية.
- أو يحصل على كرتين بـ C_4^2 إمكانية.
- أو يحصل على ثلاث كرات بـ C_4^3 إمكانية.
- أو يحصل على أربع كرات بإمكانية واحدة .

إذن عدد الإمكانيات التي يحصل فيها الشخص A على كرة واحدة على الأقل هو :

$$\boxed{C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 15}$$

و منه : احتمال أن يحصل الشخص A على كرة واحدة على الأقل يساوي :

$$\frac{15}{10386} \approx 0{,}0015 \equiv 0{,}15\%$$

③

إذا حصل الشخص C على كرة واحدة رقمها m و حصل الشخص B على كرة واحدة رقمها n فإن الشخص A سيحصل على $(m+n)$ كرة و لدينا :

$$m + n + 2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad m + n = 2$$

نعلم أن $m \neq n$ إذن هذه المعادلة لا تقبل حلولا في المجموعة $\{1 , 2 ,3 , 4\} \times \{1 , 2 ,3 , 4\}$

و بالتالي نحن بصدد حدث مستحيل و احتمال وقوعه 0

التمرين الثاني : (4,0 ن)

■(I)

نضع : $z = x + iy$ ثم ننطلق من الكتابة : $f(z) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad (1 + i\sqrt{3})z + 2\bar{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 + i\sqrt{3})(x + iy) + 2(x - iy) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (3x - \sqrt{3}y) + i(-y + \sqrt{3}x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x - \sqrt{3}y = 0 \\ -y + \sqrt{3}x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x = \sqrt{3}y \\ 3x = \sqrt{3}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad z = x + i\sqrt{3}x$$

$$\Leftrightarrow \quad z = x(1 + i\sqrt{3})$$

و منه : مجموعة حلول المعادلة $f(z) = 0$ في $\mathbb{C}$ تكتب على الشكل :

$$\mathcal{S} = \{ \ x(1 + i\sqrt{3}) \ / \ x\epsilon\mathbb{R} \}$$

■(II)(1)(أ)

لدينا : $f(z) = \frac{1}{6}\left((1 + i\sqrt{3})z + 2\bar{z}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad f(z_n) = \frac{1}{6}\left((1 + i\sqrt{3})z_n + 2\overline{z_n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad |f(z_n)| = \left|\frac{1}{6}\left((1 + i\sqrt{3})z_n + 2\overline{z_n}\right)\right|$$

نعلم أن : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ و $|z| = |\bar{z}|$.

إذن : $\Rightarrow \quad |f(z_n)| \leq \frac{1}{6}|(1 + i\sqrt{3})z_n| + \frac{1}{6}|2\overline{z_n}|$

$$\Rightarrow \quad |f(z_n)| \leq \left(\frac{1}{6}\right)2|z_n| + \left(\frac{2}{6}\right)|z_n|$$

$$\Rightarrow \quad |f(z_n)| \leq \frac{2}{3}|z_n|$$

$$\Rightarrow \quad |z_{n+1}| \leq \frac{2}{3}|z_n|$$

$$\Rightarrow \quad u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$$

و نعلم أن معيار عدد عقدي يكون دائما موجبا.

إذن : $\boxed{(\forall n\epsilon\mathbb{R}) \quad 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n}$

■(II)(1)(ب)

لدينا : $(\forall n\epsilon\mathbb{R}) \quad 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$

من أجل $(n-1)$ نحصل على : $0 \leq u_n \leq \frac{2}{3}u_{n-1}$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq u_n \leq \frac{2}{3}u_{n-1}$$

$$\leq \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)u_{n-2}$$

$$\leq \left(\frac{2}{3}\right)^3 u_{n-3}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n u_{n-n}$$

و بالتالي : $\Leftrightarrow \quad 0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n u_0$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

لدينا : $\lim_{n\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

لأن $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها موجب و أصغر من 1

و بالتالي : $(u_n)_n$ متقاربة و تؤول إلى الصفر

يعني : $\boxed{\lim_{n\infty}(u_n) = 0}$

■(II)(2)(أ)

لدينا : $\mathcal{S}_n = \mathcal{O}M_0 + \mathcal{O}M_1 + \cdots + \mathcal{O}M_n$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{S}_n = |z_0| + |z_1| + \cdots + |z_n|$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{S}_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

و نعلم أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{R}) \quad 0 \leq u_n \leq \frac{2}{3}u_{n-1}$

إذن : $\begin{cases} u_0 \leq 1 \\ u_1 \leq \left(\frac{2}{3}\right) \\ \vdots \\ u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{cases}$

و منه : $$u_0+u_1+\cdots+u_n \le \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{S}_n \le \left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\mathcal{S}_n \le 3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}$$

و لدينا : $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \ge 0$ إذن : $-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \le 0$

و منه : $\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) \le 1$

يعني : $3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) \le 3$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}) \ : \ \mathcal{S}_n \le 3}$

■ (II) ② ب

لدينا : $\mathcal{S}_n = OM_0 + OM_1 + \cdots + OM_n$

نلاحظ أن :

$$(OM_0+\cdots+OM_n)+OM_{n+1} > (OM_0+\cdots+OM_n)$$

إذن : $\mathcal{S}_{n+1} > \mathcal{S}_n$

إذن $(\mathcal{S}_n)_n$ متتالية تزايدية

و بما أنها مكبورة بالعدد 3 (يعني : $\mathcal{S}_n \le 3$) فإنها متقاربة.

■ (III) ①

لدينا : $$f(z)=\frac{1}{6}\left((1+i\sqrt{3})z+2\bar{z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(z)=\frac{1}{6}\left(r(1+i\sqrt{3})e^{i\theta}+2re^{-i\theta}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(z)=\frac{2r}{3}\left(\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)e^{i\theta}+\frac{e^{-i\theta}}{2}\right)$$

$$=\frac{2r}{3}\left(\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{2}(\cos\theta-i\sin\theta)\right)$$

$$=\frac{2r}{3}\left(\frac{\cos\theta}{4}+i\frac{\sin\theta}{4}+i\frac{\sqrt{3}\cos\theta}{4}-\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{4}+\frac{\cos\theta}{2}-i\frac{\sin\theta}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(z)=\frac{2r}{3}\left(\frac{3\cos\theta}{4}+i\frac{\sqrt{3}\cos\theta}{4}-\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{4}-i\frac{\sin\theta}{4}\right)$$

$$=\frac{2r}{3}\left(\left(\frac{3\cos\theta}{4}-\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{4}\right)+\left(i\frac{\sqrt{3}\cos\theta}{4}-i\frac{\sin\theta}{4}\right)\right)$$

$$=\frac{2r}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)\right)$$

$$=\frac{2r}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{i}{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$=\frac{2r}{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \quad f(z)=\frac{2r}{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}}$$

■ (III) ②

لدينا : $f(z_{k-1})$ هو لحق النقطة M_k بحيث : $k\epsilon\{1,\ldots,n\}$

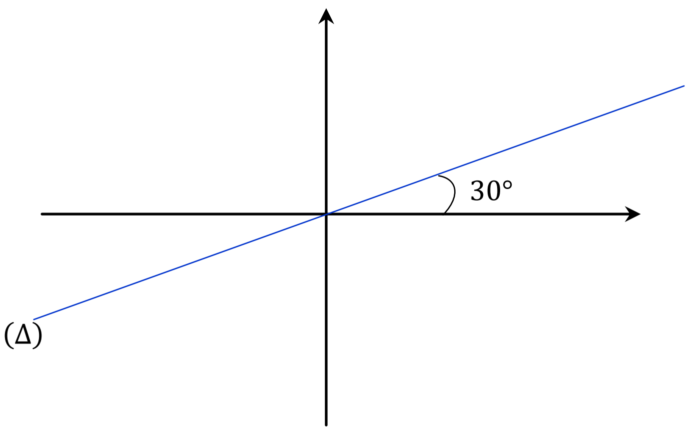
و لدينا : $$f(z)=\frac{2r}{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad f(z_{k-1})=\frac{2r}{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad arg(f(z_{k-1})) \equiv arg\left(e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right)[2\pi]$$

$$\Rightarrow \quad arg(f(z_{k-1})) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$$

و بالتالي النقط M_1 و M_2 و $\cdots$ و M_n تنتمي إلى نفس المستقيم (Δ) المبين في الشكل التالي :



التمرين الثالث : (3,5 ن)

■ (I) ①

$$2y^2-4y-7x=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(y^2-2y)=7x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(y-1)^2=7x+2$$

$$\Leftrightarrow \quad (y-1)^2=\frac{7}{2}x+1$$

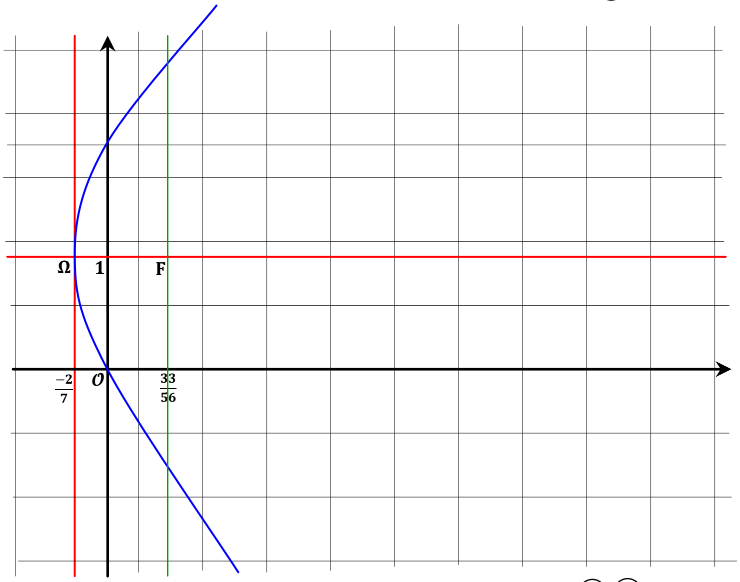
$$\Leftrightarrow \quad (y-1)^2=\frac{7}{2}\left(x+\frac{2}{7}\right)$$

إذن (Γ) شلجم رأسه : $\Omega\left(\frac{-2}{7};1\right)$

و بؤرته : $F\left(\frac{7}{8}-\frac{2}{7};0+1\right)$

يعني : $F\left(\frac{33}{56};1\right)$

■ (I) ②



■ (II) ① (أ)

لدينا : $2(y-1)^2=7x+2$

$$\Leftrightarrow \quad 2(y^2-2y+1)=7x+2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2y(y-2)=7x$$

$$\Leftrightarrow \quad 7\,/\,2y(y-2)$$

و بما أن العدد 7 أولي فإن :

$$\Leftrightarrow \quad 7/2 \quad \text{أو} \quad 7/y \quad \text{أو} \quad 7\,/\,(y-2)$$

$$\Leftrightarrow \quad y\equiv 0[7] \quad \text{أو} \quad y\equiv 2[7]$$

■ (II) ① (ب)

في حالة : $y\equiv 0[7]$.

لدينا : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ y=7k$

و لدينا : $2y(y-2)=7x$

يعني : $2(7k)(7k-2)=7x$

إذن : $x=14k^2-4k$

و في حالة : $y\equiv 2[7]$.

لدينا : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ y=7k+2$

و لدينا : $2y(y-2)=7x$

يعني : $2(7k+2)(7k)=7x$

إذن : $x=14k^2+4k$

و بالتالي : مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$\mathcal{S}=\{(14k^2-4k\ ;\ 7k),(14k^2+4k\ ;\ 7k+2)\quad/\quad k\epsilon\mathbb{Z}\}$$

■ (II) ②

لدينا : $x\wedge y=9$

<u>في حالة : $x=14k^2-4k$ و $y=7k$</u>

لدينا حسب خوارزمية إقليدس :

$$\begin{array}{r|l} 14k^2-4k & 7k \\ \hline & 2k \\ -4k & \end{array}$$

إذن من هذه القسمة الأقليدية نستنتج أن :

$$\boxed{(14k^2-4k)\ \wedge\ (7k)=(7k)\ \wedge\ (-4k)\ =\ k}$$

<u>لأن : $7\wedge(-4)=1$</u>

و منه : $x\wedge y=k=9$

و منه نحصل على النقطة : $M_1(1098\,;63)$.

في حالة : $x = 14k^2 + 4k$ و $y = 7k + 2$

لدينا : $14k^2 + 4k = 2k(7k+2)$

إذن من هذه النتيجة نستنتج أن :

$$(14k^2+4k) \wedge (7k+2) = (7k+2)$$

و منه : $x \wedge y = 7k+2 = 9$

يعني : $k = 1$

و منه نحصل على النقطة : $M_2(18\,;9)$.

التمرين الرابع : (3,0 ن)

■ 1

لدينا :

$$\frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{3+t^2} + \frac{1}{3+t^2} = \frac{t}{1+t^2} + \frac{1-t}{3+t^2}$$
$$= \frac{t(3+t^2)+(1-t)(1+t^2)}{(1+t^2)(3+t^2)}$$
$$= \frac{t^2+2t+1}{(1+t^2)(3+t^2)}$$
$$= \frac{(t+1)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}$$

ملاحظة : المسار العكسي لهذه المتساوية ستتم دراسته بتفاصيله في السنة الأولى من الأقسام التحضيرية أو الأسدس الثاني من الجامعة أو السنة الأولى من (BTS) .و هذه العملية تسمى :

< la décomposition d'une fraction rationnel en éléments simples >

مثال : $\boxed{\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{-1}{(x-2)} + \frac{1}{(x-3)}}$

■ 2

لدينا : $$\int_0^\alpha \left(\frac{1}{3+t^2}\right)dt = \frac{1}{3}\int_0^\alpha \left(\frac{1}{1+\frac{t^2}{3}}\right)dt$$

نضع : $u = \frac{t}{\sqrt{3}}$ إذن : $dt = \sqrt{3}du$

و منه : $$\int_0^\alpha \left(\frac{1}{3+t^2}\right)dt = \frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{3}}} \left(\frac{1}{1+u^2}\right)dt$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\alpha \left(\frac{1}{3+t^2}\right)dt = \frac{\sqrt{3}}{3}\left[Arctan\, u\right]_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{3}}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\int_0^\alpha \left(\frac{1}{3+t^2}\right)dt = \frac{1}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right)}$$

■ 3 أ

لدينا : $u \to \frac{1+\sin u}{2+\cos u}$

دالة متصلة على المجال $[0,\pi]$ لأنها خارج معرَّف لدالتين متصلتين على $[0,\pi]$ بحيث : $2+\cos u \neq 0$

إذن فهي تقبل دالة أصلية F على المجال $[0,\pi]$.

يعني : F قابلة للإشتقاق على المجال $[0,\pi]$.

و لدينا : $F^{'}(x) = \frac{1+sin\,x}{2+cos\,x}$

■ 3 ب

ليكن x عنصرا من المجال $[0,\pi[$

لدينا : $$F(x) = \int_0^x \left(\frac{1+sin\,u}{2+cos\,u}\right)du$$

نضع : $t = tan\left(\frac{u}{2}\right)$ إذن : $\frac{dt}{du} = \frac{1+t^2}{2}$

و منه : $$F(x) = \int_0^{tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{1+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)}{2+\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\right)\left(\frac{2}{1+t^2}\right)dt$$

$$F(x) = 2\int_0^{tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{(t+1)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}dt$$

■ 3 ج

$$F(x) = 2\int_0^{tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{(t+1)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}dt$$
$$= 2\int_0^{tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{3+t^2} + \frac{1}{3+t^2}\right)dt$$
$$= 2\int_0^{tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{t}{1+t^2}\right)dt - 2\int_0^{tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{t}{3+t^2}\right)dt + 2\int_0^{tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{1}{3+t^2}\right)dt$$
$$= \left[\ln(1+t^2)\right]_0^{tan\left(\frac{x}{2}\right)} - \left[ln(3+t^2)\right]_0^{tan\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{2}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$= \ln\left(1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) - ln\left(3+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) + ln3 + \frac{2}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$= \boxed{ln3 + \frac{2}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \ln\left(\frac{1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{3+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)}$$

■ 3 د

لدينا F متصلة على يسار π إذن : $\lim_{x\to\pi^-} F(x) = F(\pi)$

إذن :

$$\boxed{\lim_{x\to\pi^-}\left(ln3 + \frac{2}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \ln\left(\frac{1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{3+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\right) = \int_0^\pi \left(\frac{1+\sin u}{2+\cos u}\right)du} \quad (*)$$

و لدينا :

$$\boxed{\lim_{x\to\pi^-} ln\left(\frac{1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{3+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \lim_{\substack{u\to+\infty \\ u=tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}} ln\left(\frac{1+\frac{1}{u}}{1+\frac{3}{u}}\right) = ln1 = 0}$$

و لدينا كذلك:

$$\boxed{\lim_{x\to\pi^-}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}Arctan("+\infty") = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}}$$

نعوض هاتين النهايتين في المتساوية $(*)$ نحصل على :

$$\boxed{ln3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} = \int_0^\pi \left(\frac{1+\sin u}{2+\cos u}\right)du}$$

التمرين الخامس : (3,0 ن)

■ 1 أ

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{n} - e^{-nx}\right) = (+\infty) - 0 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{1}{n} - \frac{e^{-nx}}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{xe^{nx}}\right)$$

$$= (-\infty)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{0^-}\right)$$

$$= \boxed{-\infty}$$

■ 1 ب

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{xe^{nx}}\right) = \frac{1}{n}$

و لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\left(f_n(x) - \frac{1}{n}x\right) = \lim_{x\to+\infty}(-e^{-nx}) = 0$

كما نعلم أن : $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

إذن من هذه النتائج نستنتج أن المستقيم $y = \frac{1}{n}x$ مقارب مائل بجوار $+\infty$

و لدينا كذلك : $\lim_{x\to-\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{xe^{nx}}\right) = +\infty$

و نعلم أن : $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$

إذن $(\mathscr{C}_n)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب نحو الأسفل.

■ 2

$$f_n'(x) = \left(\frac{x}{n} - e^{-nx}\right)' = \frac{1}{n} + ne^{-nx} > 0$$

إذن f_n دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

نستنتج جدول تغيرات الدالة f_n كما يلي :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f_n'(x)$	$+$
f_n	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

■ 3 أ

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f_n .

f_n دالة متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

إذن f_n تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.

بما أن : $0\epsilon\mathbb{R}$ فإنه يمتلك سابقا واحدا α_n من $\mathbb{R}$ بالتقابل f_n .

و بالتالي : $(\exists!\,\alpha_n\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f_n(\alpha_n) = 0$

■ 3 ب

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{e}\right)$$

بما أن : $n \geq 2$ فإن : $n^2 \geq 4$.

أي : $n^2 \geq 4 > e$ و منه : $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{e}$

يعني : $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{e} < 0$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n \geq 2)\ ;\ f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0}$

■ 3 ج

نضع : $\varphi(x) = e^x - x - 1$ إذن : $\varphi'(x) = e^x - 1$

و منه : نستنتج جدول تغيرات الدالة φ كما يلي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
φ	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow +\infty$

بما أن φ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ و قيمتها الدنوية حسب الجدول هي 0

فإنه : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ \varphi(x) \geq 0$

يعني : $\boxed{(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ e^x \geq x + 1}$

و من هذه المتفاوتة نستنتج : : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ e^n \geq n + 1$

و منه : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ e^n \geq n$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^n} < \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow e^{-n} < \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{n} - e^{-n} > 0} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow f_n(1) = \frac{1}{n} - e^{-n} > 0$$

■ 3 د

لدينا f_n دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

إذن فهي متصلة على $\left[\frac{1}{n}\ ;1\right]$ بحيث : $n \geq 2$.

و لدينا : $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$ و $f_n(1) > 0$

إذن : $f_n(1) \cdot f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$

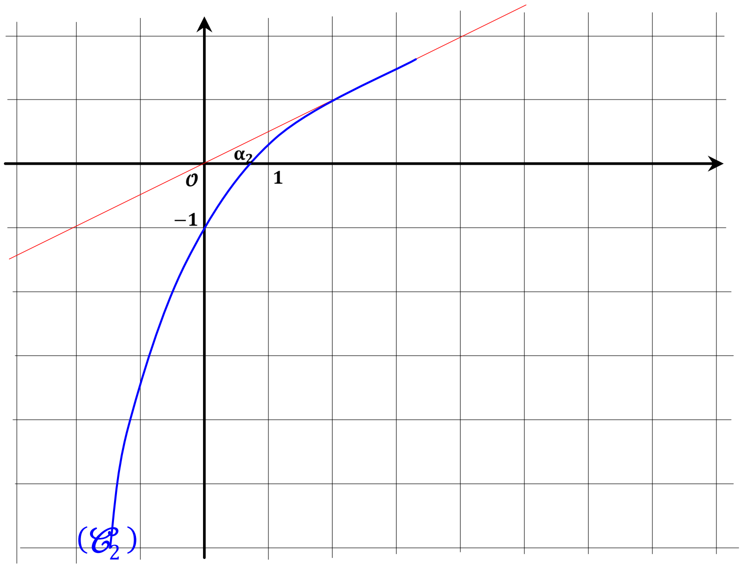
و بالتالي حسب مبرهنة القيم الوسيطية :

$$\exists\, c\, \epsilon \left]\frac{1}{n}\, , 1\right[\ ;\ f_n(c) = 0$$

و بما أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا و هو α_n .

فإن $\alpha_n = c$ و منه : $\boxed{\frac{1}{n} < \alpha_n < 1}$

■ 4



■ 5 أ

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{\alpha_n}{n+1} - e^{-(n+1)\alpha_n}$$

$$\Leftrightarrow f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{\alpha_n - ne^{-(n+1)\alpha_n} - e^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)}\left(\frac{\alpha_n}{ne^{-(n+1)\alpha_n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)$$

و نعلم أن : $f_n(\alpha_n) = 0$ إذن : $e^{-n\alpha_n} = \frac{\alpha_n}{n}$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha_n}{ne^{-(n+1)\alpha_n}} = \frac{\alpha_n}{n(e^{-n\alpha_n}) \cdot e^{-\alpha_n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha_n}{ne^{-(n+1)\alpha_n}} = \frac{\alpha_n}{n \cdot \left(\frac{\alpha_n}{n}\right) \cdot e^{-\alpha_n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha_n}{ne^{-(n+1)\alpha_n}} = e^{\alpha_n}$$

و بالتالي : $\boxed{f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)}\left(e^{\alpha_n} - 1 - \frac{1}{n}\right)}$

■ 5 ب

لدينا حسب السؤال : ج 3 $\boxed{e^{\alpha_n} \geq \alpha_n + 1}$ (#)

و لدينا حسب السؤال : د 3 $\alpha_n > \dfrac{1}{n}$

إذن : $\boxed{\alpha_n + 1 > \dfrac{1}{n} + 1}$ (##)

من (#) و (##) نستنتج أن : $e^{\alpha_n} \geq \dfrac{1}{n} + 1$

يعني : $e^{\alpha_n} - \dfrac{1}{n} - 1 \geq 0$

و بالتالي : $\boxed{f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0}$

لأن الكمية $\dfrac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)}$ موجبة دائما .

■ 5 ج

لدينا : $\boxed{f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0}$ (⋆)

لأن f_{n+1} حل للمعادلة : $f_{n+1}(x) = 0$.

و لدينا : $\boxed{f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0}$ (⋆⋆)

من (⋆) و (⋆⋆) نستنتج أن : $f_{n+1}(\alpha_n) \geq f_{n+1}(\alpha_{n+1})$

و بما أن f_{n+1} دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

فإن : $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$

و بالتالي : $\boxed{(\alpha_n)_n \text{ تناقصية .}}$ (1)

و لدينا : $\dfrac{1}{n} > 0$ و $\dfrac{1}{n} < \alpha_n$

إذن : $\alpha_n > 0$

يعني : $\boxed{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ مصغورة بالعدد } 0}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.
و سوف نحدد نهايتها فيما بعد.

■ 6 أ

ليكن $n \geq 2$.

لدينا : $f_n(\alpha_n) = 0$ إذن : $\boxed{e^{-n\alpha_n} = \dfrac{\alpha_n}{n}}$

و نعلم أن : $\dfrac{1}{n} < \alpha_n < 1$ إذن : $\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{\alpha_n}{n} < \dfrac{1}{n}$

و بالتالي : $\boxed{\dfrac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \dfrac{1}{n}}$

■ 6 ب

لدينا : $\dfrac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \dfrac{1}{n}$

إذن : $\ln\left(\dfrac{1}{n^2}\right) < \ln(e^{-n\alpha_n}) < \ln\left(\dfrac{1}{n}\right)$

لأن الدالة ln تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_*^+$.

و منه : $-2\ln(n) < -n\alpha_n < -\ln(n)$

إذن : $\ln(n) < n\alpha_n < 2\ln(n)$

و بالتالي : $\boxed{\dfrac{\ln(n)}{n} < \alpha_n < \dfrac{2\ln(n)}{n}}$

■ 6 ج

من التأطير الثمين الأخير الذي حصلنا عليه نستنتج أن :

$$\boxed{\lim_{n\infty}(\alpha_n) = 0}$$

لأن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{\ln n}{n}\right) = \lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{2\ln n}{n}\right) = 0$

■ و الحمد لله رب العالمين ■