الإمتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة الاستدراكية 2007

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 10
مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,0 ن)

نعتبر في $\mathbb{Z}$ النظمة $(\mathcal{S})$ التالية : $\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \end{cases}$ بحيث : $\begin{cases} a,b,p,q \in \mathbb{Z} \\ p \wedge q = 1 \end{cases}$

0,50 ن ① (أ) بين أنه يوجد زوج (u_0, v_0) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $pu_0 + qv_0 = 1$.

0,50 ن (ب) بين أن $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ حل للنظمة $(\mathcal{S})$.

0,50 ن ② ليكن x حلا للنظمة $(\mathcal{S})$ ، بين أن العدد pq يقسم العدد $x - x_0$

0,50 ن ③ ليكن x عددا صحيحا نسبيا بحيث : pq يقسم العدد $x - x_0$. بين أن x حل للنظمة $(\mathcal{S})$.

0,50 ن ④ استنتج مجموعة حلول النظمة $(\mathcal{S})$.

0,50 ن ⑤ حل في $\mathbb{Z}$ النظمة التالية : $\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 3[13] \end{cases}$

التمرين الثاني : (2,0 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا فرديا أكبر أو يساوي 3 . نتوفر على n صندوقا مرقما من 1 إلى n . الصندوق رقم k بحيث : $(1 \leq k \leq n)$ يحتوي على k كرة بيضاء و $(n-k)$ كرة سوداء.

نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق ثم نسحب منه كرة واحدة .

0,50 ن ① أحسب احتمال الحصول على كرة بيضاء.

0,75 ن ② أحسب احتمال أن يتم السحب من صندوق رقمه فردي.

0,75 ن ③ أحسب احتمال الحصول على كرة بيضاء ، علما أن السحب تم من صندوق رقمه عدد فردي .

التمرين الثالث : (2,0 ن)

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر المجموعة : $(\mathcal{H}) = \{M(z) \in (P) / z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2 = 1\}$

0,25 ن ① (أ) حدد معادلة ديكارتية للمجموعة $(\mathcal{H})$.

0,50 ن (ب) بين أن $(\mathcal{H})$ هذلول و حدد مركزه و رأسيه و مقاربيه في المعلم $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

0,25 ن (ج) أنشىء $(\mathcal{H})$.

② $M(a)$ و $M(b)$ نقطتان من $(\mathcal{H})$. نضع : $\varphi(a,b) = a\bar{b} + \bar{a}b - \overline{ab}$.

0,50 ن (أ) بين أن : $M(\varphi(a,b)) \in (\mathcal{H})$

0,50 ن (ب) تحقق أن $\varphi(a,1) = 1$ و أن $\varphi(a,\bar{a}) = 1$.

1,00 ن ③ نزود $(\mathcal{H})$ بقانون التركيب الداخلي $(*)$ حيث لكل $M(a)$ و $M(b)$ من $(\mathcal{H})$: $M(a) * M(b) = M(\varphi(a,b))$.

بين أن : $((\mathcal{H}),*)$ زمرة تبادلية .

التمرين الرابع : (3,0 ن)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 . نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

نعتبر المجموعة التالية :
$$\mathcal{F}=\left\{\mathcal{M}(a,b)=\begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b\end{pmatrix}/(a,b)\epsilon\mathbb{R}^2\right\}$$

و هي مزودة بجمع المصفوفات $(+)$ و ضرب مصفوفة في عدد حقيقي $(\cdot)$ و ضرب المصفوفات $(\times)$.

نضع : $I=\mathcal{M}(1,0)$ و $J=\mathcal{M}(0,1)$ و $O=\mathcal{M}(0,0)$

0,50 ن — ① (أ) بين أن : $(\mathcal{F},+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

0,50 ن — (ب) بين أن (I,J) أساس للفضاء المتجهي $(\mathcal{F},+,\ \cdot)$ و اعط بعده .

0,50 ن — ② ليكن α عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$ ، بين أن الأسرة $(1,\alpha)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C},+,\ \cdot)$.

③ نعتبر التطبيق ψ من $\mathbb{C}$ نحو $\mathcal{F}$ المعرف بما يلي : $\psi(z)=\mathcal{M}(m,n)$.

بحيث : $z=m+\alpha n$ و $m\epsilon\mathbb{R}$ و $n\epsilon\mathbb{R}$ و $z\epsilon\mathbb{C}$.

0,50 ن — (أ) تحقق أن $J^2=-2(I+J)$ و $\psi(\alpha)=J$

0,50 ن — (ب) حدد قيمتي α التي يكون من أجلها التطبيق ψ تشاكلا تقابليا من $(\mathbb{C},\times)$ نحو $(\mathcal{F},\times)$.

0,50 ن — ④ نأخذ : $\alpha=-1+i$. أكتب في الأساس (I,J) المصفوفة J^{2007} .

التمرين الخامس : (9,0 ن)

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=1+x-e^{-x}$.

0,50 ن — ① (أ) أدرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

0,50 ن — (ب) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة g .

0,50 ن — (ج) استنتج أن $x_0=0$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x)=0$.

0,50 ن — ② لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي :
$$f(x)=\frac{1}{1+x-e^{-x}}$$

$(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,50 ن — (أ) أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$

0,25 ن — (ب) أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^*$.

0,50 ن — (ج) ضع جدول تغيرات الدالة f .

0,50 ن — (د) أنشىء $(\mathscr{C})$.

0,50 ن — ③ (أ) ليكن n من $\mathbb{N}^*$ ، بين أن المعادلة $f(x)=n$ تقبل حلا وحيدا x_n في المجال $]0,+\infty[$.

0,50 ن — (ب) بين أن المتتالية $(x_n)_{n\geq1}$ تناقصية و أنها متقاربة .

0,50 ن — (ج) أثبت أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$

0,25 ن (II) ① أ) بين أن المعادلة $f(x) = 1$ تكافئ المعادلة $e^x = x$

0,50 ن ب) بين أن المعادلة $e^x = x$ تقبل حلا وحيدا هو $\alpha = x_1$ بحيث : $\frac{1}{e} \leq \alpha \leq 1$

② تعتبر المتتالية $(y_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي $y_1 = 1$ و $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \;:\; y_{n+1} = e^{-y_n}$

0,50 ن أ) بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$: $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$

0,50 ن ب) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \;:\; |y_{n+1} - \alpha| \leq e^{-\left(\frac{1}{e}\right)} |y_n - \alpha|$

0,50 ن ج) استنتج أن : $(y_n)_{n\geq 1}$ متقاربة محددا نهايتها .

(III) لتكن $\mathcal{F}$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بما يلي :

$$\boxed{(\forall x > 0) \;:\; \mathcal{F}(x) = \int_x^{2x} f(t)dt \quad \text{و} \quad \mathcal{F}(0) = \frac{1}{2}\ln 2}$$

0,25 ن ① أ) بين أن ——— $(\forall t > 0) \;:\; \frac{1}{1+t} < f(t) < \frac{1}{t}$

0,50 ن ب) استنتج النهاية التالية : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathcal{F}(x)$

0,50 ن ② أ) بين أن : ——— $(\forall t \geq 0) \;:\; 1 - t \leq e^{-1} \leq 1 - t + \frac{t^2}{2}$

0,50 ن ب) بين أن لكل t من المجال $]0,4[$: $\frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t}\right)$

0,25 ن ج) استنتج أن $\mathcal{F}$ متصلة على اليمين في 0

0,50 ن ③ أ) بين أن $\mathcal{F}$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و أحسب $\mathcal{F}'(x)$ من أجل $x > 0$.

0,25 ن ب) أدرس تغيرات الدالة $\mathcal{F}$ على $\mathbb{R}_+$.

■ ① أ

لدينا : $p \wedge q = 1$

إذن حسب مبرهنة $Bezout$:

$$(\exists\, u_0 , v_0 \in \mathbb{Z}) \ : \ pu_0 + qv_0 = 1$$

■ ① ب

ليكن : $x_0 = bpu_0 + aqv_0$

لدينا حسب السؤال ① أ $qv_0 = 1 - pu_0$

إذن : $x_0 = bpu_0 + a(1 - pu_0)$

يعني : $x_0 = bpu_0 + a - apu_0$

و منه : $x_0 = p(bu_0 - au_0) + a$

إذن : $x_0 - a = p(bu_0 - au_0)$

يعني : $p \,/\, (x_0 - a)$ و بالتالي : $\boxed{x_0 \equiv a\,[p]}$ (1)

و لدينا كذلك حسب السؤال ① أ $pu_0 = 1 - qv_0$

إذن:
$$\begin{aligned} x_0 &= b(1 - qv_0) + v_0 a \\ &= b - bqv_0 + qv_0 a \\ &= q(v_0 a - bv_0) + b \end{aligned}$$

و منه : $x_0 - b = q(v_0 a - bv_0)$

يعني : $q \,/\, (x_0 - b)$ و بالتالي : $\boxed{x_0 \equiv b\,[q]}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن x_0 حل للنظمة $(\mathcal{S})$.

■ ②

للإجابة على هذا السؤال نحتاج إلى خاصية قوية في الحسابيات و هي :

$$\boxed{\begin{cases} m/a \\ n/a \\ m \wedge n = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad mn \,/\, a}$$

لنبرهن أولا على صحة هذه الخاصية

لدينا : $m \,/\, a$ إذن : $(\exists k \in \mathbb{Z}) \ ; \overset{(*)}{\boxed{a = mk}}$

و لدينا كذلك : $n \,/\, a$ إذن حسب $(*)$: $n \,/\, mk$

و بما أن $m \wedge n = 1$ فإنه حسب $(Gauss)$: $n \,/\, k$

يعني : $(\exists k' \in \mathbb{Z}) \ ; \overset{(**)}{\boxed{k = nk'}}$

من $(*)$ و $(**)$ نستنتج أن : $a = mnk'$

إذن : $\boxed{mn \,/\, a}$

نعود إلى التمرين لاستغلال الخاصية المبرهن عليها :

ليكن x حلا للنظمة $(\mathcal{S})$.

نريد أن نبين أن $pq \,/\, (x - x_0)$.

لدينا : x_0 و x حلين للنظمة $(\mathcal{S})$.

إذن :
$$\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \\ x_0 \equiv a[p] \\ x_0 \equiv b[q] \end{cases}$$

و منه :
$$(\exists\, k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}) \ ; \ \begin{cases} (x - a) = k_1 p \\ (x - b) = k_2 q \\ (x_0 - a) = k_3 p \\ (x_0 - b) = k_4 q \end{cases}$$

لدينا :
$$\begin{aligned} (x - x_0) &= (x - a) - (x_0 - a) \\ &= k_1 p - k_3 p \\ &= (k_1 - k_3) p \end{aligned}$$

إذن : $\boxed{p \,/\, (x - x_0)}$ (1)

و لدينا كذلك :
$$\begin{aligned} (x - x_0) &= (x - b) - (x_0 - b) \\ &= k_2 q - k_4 q \\ &= (k_2 - k_4) q \end{aligned}$$

إذن : $\boxed{q \,/\, (x - x_0)}$ (2)

حصلنا لحد الآن على :
$$\begin{cases} p \,/\, (x - x_0) \\ q \,/\, (x - x_0) \\ p \wedge q = 1 \end{cases}$$

من هذه الأشياء نستنتج حسب الخاصية أن : $pq \,/\, (x - x_0)$.

■ ③

ننطلق من : $pq \,/\, (x - x_0)$

و نريد أن نبين أن :
$$\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \end{cases}$$

لدينا x_0 حل للنظمة $(\mathcal{S})$ يعني :
$$\begin{cases} x_0 \equiv a[p] \\ x_0 \equiv b[q] \end{cases}$$

و منه :
$$(\exists\, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}) \ ; \ \begin{cases} x_0 = k_1 p + a & (1) \\ x_0 = k_2 q + b & (2) \end{cases}$$

و لدينا حسب الإنطلاقة : $pq \,/\, (x - x_0)$

إذن : $(\exists k_3 \in \mathbb{Z}) \ ; \overset{(3)}{\boxed{(x - x_0) = k_3 pq}}$

من (1) و (3) نستنتج أن : $x - (k_1 p + a) = k_3 pq$

يعني : $x - a = p(k_3 q + k_1)$ أي: $p \,/\, (x - a)$

و بالتالي : $\boxed{x \equiv a[p]}$ (4)

من (2) و (3) نستنتج أن : $x-(k_2q+b)=k_3pq$

إذن : $(x-b)=q(k_3p+k_2)$

و منه : $q\ /\ (x-b)$ يعني : $\boxed{x\equiv b[q]}$ (5)

من (4) و (5) نستنتج أن x حل للنظمة $(\mathcal{S})$.

■ ④

من السؤالين (2) و (3) نستنتج التكافؤ التالي :

$$\boxed{pq\ /\ (x-x_0) \iff x \text{ حل للنظمة } (\mathcal{S})}$$

إذن : $x\equiv x_0[pq] \iff x$ حل للنظمة $(\mathcal{S})$

إذن مجموعة حلول النظمة $(\mathcal{S})$ هي : $\overline{x_0}$

نشير إلى أن $\overline{x_0}$ عنصر من الفضاء المتجهي : $\mathbb{Z}/(pq)\mathbb{Z}$

بتعبير آخر : مجموعة حلول النظمة $(\mathcal{S})$ هي جميع الأعداد النسبية التي يكون باقي قسمتها على pq مساويا لـ x_0 .

■ ⑤

نريد أن نحل في $\mathbb{Z}$ النظمة $(\mathcal{S}_0)$ التالية : $(\mathcal{S}_0):\begin{cases} x\equiv 1[8] \\ x\equiv 3[13]\end{cases}$

الأسئلة السابقة تعتبر دراسة نظرية لحلول النظمة : $\begin{cases} x\equiv a[p] \\ x\equiv b[q]\end{cases}$

مع : $p\wedge q=1$

و السؤال الخامس عبارة عن تطبيق عددي لنتائج تلك الدراسة

ليكن x حلا للنظمة $(\mathcal{S}_0)$.

هذا يعني : $x\equiv x_0[8\times 13]$

لنحسب الآن x_0 . نضع : $p=8$ و $q=13$

لدينا :

المقسوم	المقسوم عليه	الخارج	الباقي		
13	8	1	5	$\longmapsto \boxed{5=13-8}$	(1)
8	5	1	3	$\longmapsto \boxed{3=8-5}$	(2)
5	3	1	2	$\longmapsto \boxed{2=5-3}$	(3)
3	2	1	1	$\longmapsto \boxed{1=3-2}$	(4)

ننطلق من النتيجة (4) .

(4) $\boxed{1=3-2}$ $\overset{\text{حسب (3)}}{\Longrightarrow}$ $1=3-(5-3)$

يعني : $1=2\times 3-5$

$\overset{\text{حسب (2)}}{\Longrightarrow}$ $1=2(8-5)-5$

يعني : $1=2\times 8-3\times 5$

$\overset{\text{حسب (1)}}{\Longrightarrow}$ $1=2\times 8-3(13-8)$

يعني : $\boxed{1=5\times 8-3\times 13}$

من هذه الكتابة الأخيرة نستنتج أن : $\boxed{\mathrm{u}_0=5}$ و $\boxed{v_0=-3}$

و منه :
$$\begin{aligned} x_0 &= 3pu_0+qv_0 \\ &= (3\times 8\times 5)-(13\times 3) \\ &= 81 \end{aligned}$$

إذن نستنتج التكافؤ التالي :

$$\boxed{x\equiv 81[104] \iff x \text{ حل النظمة } (\mathcal{S}_0)}$$

و بالتالي : $\boxed{x=104k+81\quad ;\quad k\epsilon\mathbb{Z}}$

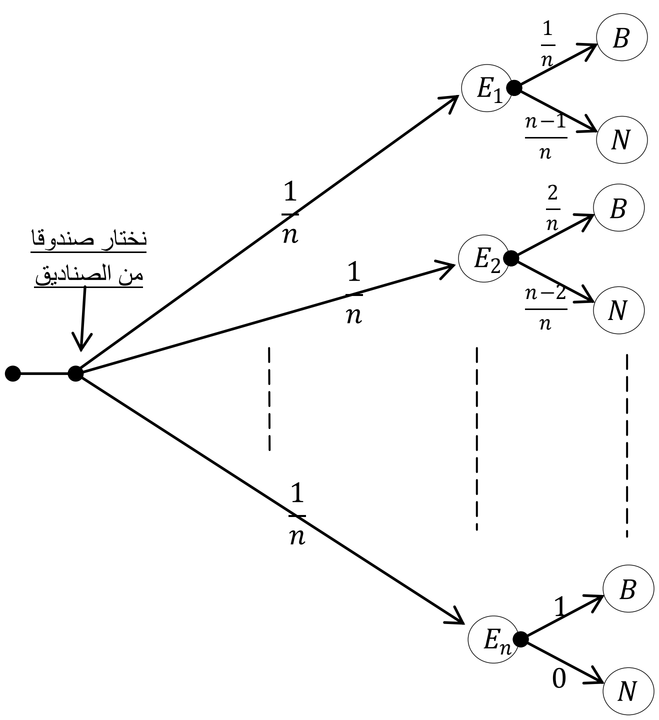
التمرين الثاني : (2,0 ن)

■ ①

في جل مراحل هذا التمرين، نشتغل بـ : $1\leq i\leq n$

نضع :
$E_i=$ " اختيار الصندوق رقم i "
$B=$ " سحب كرة بيضاء "
$N=$ " سحب كرة سوداء "

نحول التجربة الواردة في التمرين إلى شجرة الاحتمالات التالية :



انطلاقا من هذه الشجرة نستنتج أن :

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(B\cap E_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{i}{n}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$=\frac{n(n+1)}{2n^2}$$

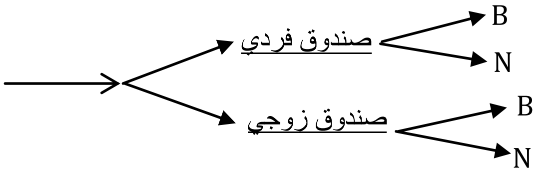
$$=\boxed{\frac{(n+1)}{2n}}$$

■ ②

في هذا السؤال لا يهمنا لون الكرة و يمكن إعادة صياغة السؤال بالطريقة التالية :

" ما هو احتمال اختيار صندوق فردي من بين n صندوق "

و هذه التجربة يمكن نمذجتها بالشجرة التالية :



من جهة أخرى لدينا n عدد فردي

إذن في المجموعة $\{1;2;3\cdots;n\}$ يوجد $\frac{(n+1)}{2}$ عدد فردي.

إذن :
$$p(\text{صندوق فردي})=\frac{\text{عدد الصناديق الفردية}}{\text{عدد الصناديق}}$$

$$=\frac{\frac{(n+1)}{2}}{n}=\boxed{\frac{(n+1)}{2n}}$$

■ ③

$B_I=$ " الحصول على كرة بيضاء علما أن السحب تم من صندوق رقمه عدد فردي "

بالعودة إلى شجرة الإحتمالات السابقة نكتب :

$$P(B_I)=\sum_{\substack{i=1\\ i\ \text{فردي}}}^{n} P(B\cap E_i)=\sum_{\substack{i=1\\ i\ \text{فردي}}}^{n}\frac{i}{n^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i=1\\ i=2k+1}}^{n} i$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(2k+1)=\frac{1}{n^2}\left(2\left(\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}k\right)+\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{n^2}\left(\frac{2\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2}+\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)$$

$$=\frac{n^2-1}{4n^2}+\frac{n-1}{2n^2}=\frac{n^2-1}{4n^2}+\frac{2(n-1)}{4n^2}$$

$$=\frac{n^2+2n-3}{4n^2}$$

$$=\boxed{\frac{(n-1)(n+3)}{4n^2}}$$

التمرين الثالث : (3,0 ن)

■ ① أ

لدينا : $(H):\ \{M(z)/z^2+\bar{z}^2-|z|^2=1\}$

نضع : $z=x+iy$

$$M(z)\epsilon\,(H)\iff (x+iy)^2+(x-iy)^2-(x^2+y^2)=1$$

$$\iff x^2-3y^2=1$$

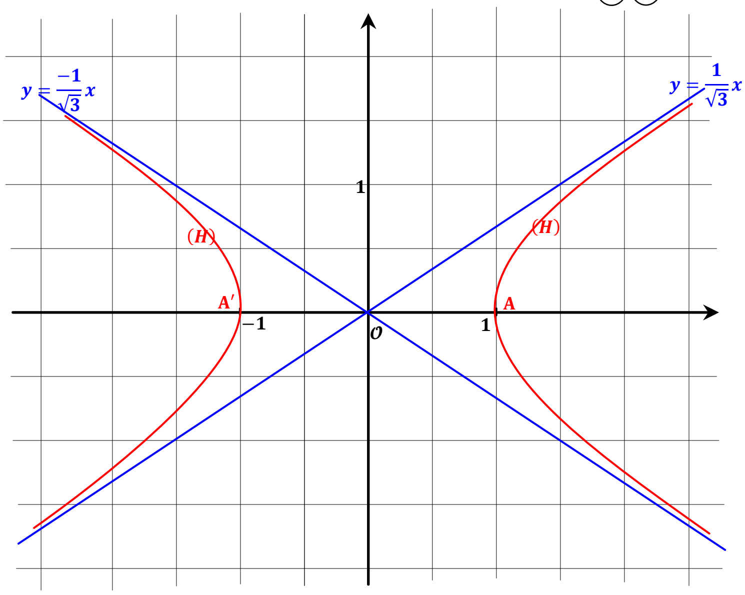
$$\iff \boxed{\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=1}$$

إذن (H) هذلول مركزه : $O(0,0)$

و رأساه : $A(1,0)$ و $A'(-1,0)$

و مقارباه : $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ و $y=\frac{-1}{\sqrt{3}}x$

■ ① ج



■ ② أ

لتكن $M(a)$ و $M(b)$ نقطتين من (H)

نضع : $\varphi(a,b) = a\bar{b} + \bar{a}b - \overline{ab}$

من أجل اختصار الكتابة نضع مؤقتا : $\varphi(a,b) = \varphi$

لدينا : $M(a)$ و $M(b)$ نقطتان من (H) .

إذن : $\begin{cases} a^2 + \bar{a}^2 - |a|^2 = 1 \\ b^2 + \bar{b}^2 - |b|^2 = 1 \end{cases}$

نضرب المتساويتين طرفا بطرف نحصل على :

$$(a^2 + \bar{a}^2 - |a|^2)(b^2 + \bar{b}^2 - |b|^2) = 1$$

يعني :

$$\begin{aligned} &\left((a\bar{b})^2 + (\bar{a}b)^2\right) - (a^2|b|^2 + b^2|a|^2) \\ &\quad + (\bar{a}^2|b|^2 + \bar{b}^2|a|^2) \\ &\quad = 1 - \left((ab)^2 + (\overline{ab})^2\right) - |ab|^2 \end{aligned}$$

و لدينا :

$$\begin{aligned} \varphi\bar{\varphi} &= (a\bar{b} + \bar{a}b - \overline{ab})(\bar{a}b + a\bar{b} - ab) \\ &= 3|ab|^2 + \left((a\bar{b})^2 + (\bar{a}b)^2\right) - (a^2|b|^2 + b^2|a|^2) \\ &\quad + (\bar{a}^2|b|^2 + \bar{b}^2|a|^2) \\ &= 3|ab|^2 + 1 - \left((ab)^2 + (\overline{ab})^2\right) - |ab|^2 \end{aligned}$$

إذن : $(*)\ \boxed{\varphi\bar{\varphi} = 2|ab|^2 + 1 - \left((ab)^2 + (\overline{ab})^2\right)}$

من جهة أخرى لدينا :

$$\begin{aligned} \varphi - \bar{\varphi} &= (a\bar{b} + \bar{a}b - \overline{ab}) - (\bar{a}b + a\bar{b} - ab) \\ &= ab - \overline{ab} \end{aligned}$$

إذن : $(**)\ \boxed{\varphi - \bar{\varphi} = ab - \overline{ab}}$

و منه :

$$\begin{aligned} (\varphi - \bar{\varphi})^2 &= \varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - 2\varphi\bar{\varphi} \\ &= (ab)^2 + (\overline{ab})^2 - 2|ab|^2 \end{aligned}$$

يعني :

$$\begin{aligned} \varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - 2\varphi\bar{\varphi} &= (\varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - \varphi\bar{\varphi}) - \varphi\bar{\varphi} \\ &= (ab)^2 + (\overline{ab})^2 - 2|ab|^2 \end{aligned}$$

و منه :

$$\varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - |\varphi|^2 = \varphi\bar{\varphi} + \left((ab)^2 + (\overline{ab})^2 - 2|ab|^2\right)$$

باستعمال العلاقة $(*)$ نحصل على :

$$\begin{aligned} \varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - |\varphi|^2 &= 2|ab|^2 - \left((ab)^2 + (\overline{ab})^2\right) + 1 \\ &\quad + (ab)^2 + (\overline{ab})^2 - 2|ab|^2 = 1 \end{aligned}$$

حصلنا إذن على العلاقة التالية $\boxed{\varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - |\varphi|^2 = 1}$

أو باستعمال الترميز الأصلي

$$\boxed{\left(\varphi(a,b)\right)^2 + \overline{\left(\varphi(a,b)\right)}^2 - \left|\left(\varphi(a,b)\right)\right|^2 = 1}$$

و بالتالي : $M\left(\varphi(a,b)\right)$ نقطة من (H) .

■ ② ب

$$\varphi(z,1) = z + \bar{z} - \bar{z} = z$$

$$\begin{aligned} \varphi(z,\bar{z}) &= zz + \bar{z}\bar{z} - \overline{z\bar{z}} \\ &= z^2 + \bar{z}^2 - \bar{z}z \\ &= z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

■ ③

نريد أن نبين أن $*$ تجميعي و تبادلي و يقبل عنصرا محايدا
و كل عنصر يمتلك مماثلا في (H) بالقانون $*$.

نحتاج في البداية أن نبين الخاصيتين التاليتين و المتعلقتين بهذا التمرين فقط.

$$\overset{(1)}{\boxed{\varphi(a,b) - \varphi(\bar{a},\bar{b}) = ab - \overline{ab}}} \quad \text{و} \quad \overset{(2)}{\boxed{\overline{\varphi(a,b)} = \varphi(\bar{a},\bar{b})}}$$

لدينا :

$$\begin{aligned} \overline{\varphi(a,b)} &= \overline{(\bar{a}b + a\bar{b} - \overline{ab})} \\ &= a\bar{b} + \bar{a}b - ab \\ &= \varphi(\bar{a},\bar{b}) \end{aligned}$$

و لدينا كذلك :

$$\begin{aligned} \varphi(a,b) - \varphi(\bar{a},\bar{b}) &= (a\bar{b} + \bar{a}b - \overline{ab}) - (\bar{a}b + a\bar{b} - ab) \\ &= ab - \overline{ab} \end{aligned}$$

الآن لتكن $M(a)$ و $M(b)$ و $M(c)$ ثلاثة عناصر من (H) .

لدينا :

$$\begin{aligned} \left(M(a) * M(b)\right) * M(c) &= M\left(\varphi(a,b)\right) * M(c) \\ &= M\left(\varphi(a,b)\right) * M(c) \\ &= M[\varphi(\varphi(a,b),c)] \end{aligned}$$

$$= c\overline{\varphi(a,b)} + \bar{c}\varphi(a,b) - \bar{c}\overline{\varphi(a,b)}$$

$$= c\varphi(\bar{a},\bar{b}) + \bar{c}\varphi(a,b) - \bar{c}\varphi(\bar{a},\bar{b})$$

$$= c\varphi(\bar{a},\bar{b}) + \bar{c}\left(\varphi(a,b) - \varphi(\bar{a},\bar{b})\right)$$

$$= c\varphi(\bar{a},\bar{b}) + \bar{c}\left(ab - \overline{ab}\right)$$

$$= c\left(\bar{a}b + a\bar{b} - ab\right) + \bar{c}ab - \overline{abc}$$

$$= \boxed{\bar{a}bc + ca\bar{b} - abc + \bar{c}ab - \overline{abc}} \quad (3)$$

<u>بنفس الطريقة لدينا :</u>

$$M(a) * \left(M(b) * M(c)\right) = M(a) * M\left(\varphi(b,c)\right)$$

$$= M\left(\varphi(a,\varphi(b,c))\right)$$

$$= \bar{a}\varphi(b,c) + a\varphi(\bar{b},\bar{c}) - \bar{a}\varphi(\bar{b},\bar{c})$$

$$= a\varphi(\bar{b},\bar{c}) + \bar{a}\left(\varphi(b,c) - \varphi(\bar{b},\bar{c})\right)$$

$$= a\varphi(\bar{b},\bar{c}) + \bar{a}\left(bc - \overline{bc}\right)$$

$$= a\left(\bar{b}c + b\bar{c} - bc\right) + \bar{a}bc - \overline{abc}$$

$$(4) \quad \boxed{= \bar{b}ca + ab\bar{c} - abc + \bar{a}bc - \overline{abc}}$$

من (3) و (4) نستنتج أن :

$$\left(M(a) * M(b)\right) * M(c) = M(a) * \left(M(b) * M(c)\right)$$

و بالتالي : $*$ قانون تجميعي في (H) .

<u>التبادلية :</u>

في البداية لدينا:

$$\varphi(a,b) = a\bar{b} + \bar{a}b - \overline{ab}$$

$$= b\bar{a} + \bar{b}a - \overline{ba}$$

$$= \varphi(b,a)$$

إذن : $(5)\ \boxed{\varphi(a,b) = \varphi(b,a)}$

ليكن a و b عددين حقيقيين .

لدينا :

$$M(a) * M(b) = M\left(\varphi(a,b)\right)$$

$$= M\left(\varphi(b,a)\right)$$

$$= M(b) * M(a)$$

و بالتالي : $*$ قانون تبادلي في (H)

<u>العنصر المحايد :</u>

ننطلق من الكتابة : $M(a) * M(e) = M(a)$.

يعني : $M\left(\varphi(a,e)\right) = M\left(\varphi(a,1)\right)$

يعني : $\varphi(a,e) = \varphi(a,1)$

ومنه : $e = 1$

يعني : $M(a) * M(1) = M(a)$

و نشير هنا إلى أن : $M(1) \epsilon (H)$ لأن : $1^2 + \bar{1}^2 - |1|^2 = 1$

و بما أن القانون $*$ تبادلي فإن :

$$M(a) * M(e) = M(e) * M(a) = M(a)$$

إذن $M(1)$ هو العنصر المحايد للقانون $*$ في (H) .

<u>التماثل :</u> ليكن : $M(a), M(x) \ \epsilon \ (H)$

ننطلق من الكتابة : $M(a) * M(x) = M(1)$

يعني : $M\left(\varphi(a,x)\right) = M\left(\varphi(a,\bar{a})\right)$

يعني : $\varphi(a,x) = \varphi(a,\bar{a})$

و منه : $x = \bar{a}$

بما أن $M(a) \ \epsilon \ (H)$ فإن $a^2 + \bar{a}^2 - |a|^2 = 1$

و منه : $\overline{a^2 + \bar{a}^2 - |a|^2} = 1$ يعني : $\bar{a}^2 + a^2 - |a|^2 = 1$.

و منه : $M(\bar{a}) \ \epsilon \ (H)$

و بالتالي : كل عنصر $M(a)$ من (H) يقبل مماثلا $M(\bar{a})$ من (H) بالقانون $*$.

<u>خلاصة</u> : $\boxed{((H),*) \text{ زمرة تبادلية .}}$

<u>التمرين الرابع : (3,0 ن)</u>

■ ① أ

لدينا $\mathcal{F}$ جزء غير فارغ من المجموعة : $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

لأن : $\mathcal{M}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ \epsilon \ \mathcal{F}$

و لدينا :

$$\mathcal{M}(a,b) - \mathcal{M}(c,d) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c+d & -d \\ 5d & c-3d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a-c)-(b+d) & -b-d \\ 5(b-d) & (a-c)-3(b+d) \end{pmatrix}$$

$$= \mathcal{M}\left((a-c),(b-d)\right) \ \epsilon \ \mathcal{F}$$

إذن : $\boxed{(\mathcal{F},+) \text{ زمرة جزئية من } (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)}$

ليكن : $\lambda \in \mathbb{R}$ و $\mathcal{M}(a,b) \in \mathcal{F}$.

$$\lambda\mathcal{M}(a,b)=\lambda\begin{pmatrix}a+b & -b\\ 5b & a-3b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a+\lambda b & -\lambda b\\ 5\lambda b & \lambda a-3\lambda b\end{pmatrix}$$
$$=\mathcal{M}(\lambda a,\lambda b)\in(\mathcal{F})$$

إذن $\mathcal{F}$ جزء مستقر بالنسبة للقانون الخارجي $(\cdot)$.

و نعلم أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و $\mathcal{F}$ جزء من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

إذن الخاصيات التالية الخاصة بالمجموعة $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ تبقى صالحة للمجموعة $\mathcal{F}$.

و منه :

$$(\forall\, M,M'\in\mathcal{F}),(\forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{R})\;;\;\begin{cases}\alpha(M+M')=\alpha M+\alpha M'\\ (\alpha+\beta)M=\alpha M+\beta M\\ (\alpha\beta)M=\alpha(\beta.M)\\ I.M=M\end{cases}$$

إذن : $\boxed{(\mathcal{F},+,\cdot)\ \text{فضاء متجهي حقيقي.}}$

■ 1 ب

يكفي أن تكون الأسرة (I,J) مولدة للفضاء $(\mathcal{F},+,\cdot)$ و أن تكون أسرة حرة.

لدينا : $(\forall\mathcal{M}(a,b)\in\mathcal{F})\;:\;\mathcal{M}(a,b)=\begin{pmatrix}a+b & -b\\ 5b & a-3b\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow\quad \mathcal{M}(a,b)=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b & -b\\ 5b & -3b\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\quad \mathcal{M}(a,b)=aI+bJ$$

و منه : الأسرة (I,J) مولدة للفضاء $\mathcal{F}$

ليكن α و β عددين حقيقيين بحيث : $\alpha I+\beta J=0$.

يعني : $\begin{pmatrix}\alpha+\beta & -\beta\\ 5\beta & \alpha-3\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

يعني : $\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ -\beta=0\\ 5\beta=0\\ \alpha-3\beta=0\end{cases}$ و منه : $\alpha=\beta=0$

إذن الأسرة (I,J) حرة .

و بالتالي (I,J) أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $\mathcal{F}$ و بُعدُهُ يساوي 2

■ 2

ليكن α عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$

إذن : $(\exists\alpha_1\in\mathbb{R}),(\exists\alpha_2\in\mathbb{R}^*)\;\;;\;\;\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$

ليكن $z=x+iy$ عددا عقديا .

نضع : $z=m_1+m_2\alpha$

$$\Longrightarrow\quad z=m_1+m_2(\alpha_1+i\alpha_2)$$

$$\Longrightarrow\quad z=m_1+m_2\alpha_1+im_2\alpha_2$$

بما أن : $z=x+iy$ فإن : $\boxed{\begin{cases}x=m_1+m_2\alpha_1\\ y=m_2\alpha_2\end{cases}}$

و منه : $\begin{cases}m_1=\left(x-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}y\right)\in\mathbb{R}\\ m_2=\left(\frac{y}{\alpha_2}\right)\in\mathbb{R}\end{cases}$

يعني : $(\forall z\in\mathbb{C}),(\exists(m_1,m_2)\in\mathbb{R}^2)\;\;;\;\;z=m_1+m_2\alpha$

إذن $\boxed{\{1;\alpha\}\ \text{أسرة مولدة لـ}\ \mathbb{C}\ .}$ (8)

لتكن $x+\alpha y$ تأليفة خطية منعدمة لـِ 1 و α يعني : $x+\alpha y=0$

$$\Leftrightarrow\quad x+y(\alpha_1+i\alpha_2)=0$$

$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x+y\alpha_1=0\\ \alpha_2y=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$$

إذن $\boxed{\{1;\alpha\}\ \text{أسرة حرة}}$ (9)

من (8) و (9) نستنتج أن $\{1;\alpha\}$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

■ 3 أ

نضع : $z=x+\alpha y$ بحيث : $x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$.

نعتبر التطبيق ψ المعرف بما يلي :

$$\psi\;:\;\mathbb{C}\longrightarrow F$$
$$z\longrightarrow M(a,b)$$

لدينا : $\alpha=0+\alpha 1$ إذن : $\psi(\alpha)=M(0,1)=J$.

و لدينا : $J^2+2(I+J)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ -10 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -2\\ 10 & -4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

و منه : $J^2+2(\mathrm{I}+\mathrm{J})=\Theta$ يعني : $J^2=-2(I+J)$

■ 3 ب

ليكن z و z' عددين عقديين بحيث : $z=x+\alpha y$ و $z'=c+\alpha d$

لكي يكون ψ تشاكلا يكفي أن يحقق : $\psi(zz')=\psi(z)\times\psi(z')$

يعني : $\psi\big((x+\alpha y)\times(c+\alpha d)\big)=\psi(x+\alpha y)\times\psi(c+\alpha d)$

لدينا : $\psi(x+\alpha y)\times\psi(c+\alpha d)=\mathcal{M}(x,y)\times\mathcal{M}(c,d)$

$$=(xI+yJ)\times(cI+dJ)$$

$$=xcI+xdJ+ycJ+ydJ^2$$

$$=xcI+xdJ+ycJ+yd\big(-2(I+J)\big)$$

$$=(xc-2yd)I+(xd+yc-2yd)J$$

$$=\mathcal{M}\big((xc-2yd);(xd+yc-2yd)\big)$$

$$=\psi\big((xc-2yd)+(xd+yc-2yd)\alpha\big)$$

$$= \psi\big((xc-2yd)+(xd+yc-2yd)\alpha\big)$$

لكي يكون ψ تشاكلا تقابليا يكفي أن يحقق :

$$\psi\big((xc-2yd)+(xd+yc-2yd)\alpha\big) = \psi(xc+\alpha xd+\alpha yc+\alpha^2 yd)$$

يعني : $(xc-2yd)+(xd+yc-2yd)\alpha$

$$= xc+\alpha xd+\alpha yc+\alpha^2 yd$$

نرتب جيدا هذه المتساوية نحصل على :

$$(yd)\alpha^2+(2yd)\alpha+(2yd)=0$$

يعني : $\alpha^2+2\alpha+2=0$

نحل هذه المعادلة بالطريقة التقليدية نجد :

$\alpha=-1+i$ أو $\alpha=-1-i$

و نشير كذلك إلى أن لكل عنصر $\mathcal{M}(x,y)$ يوجد عدد عقدي وحيد $z=x+y\alpha$ بحيث : $\varphi(z)=\mathcal{M}(x,y)$

و ذلك لأن $(1,\alpha)$ أساس للفضاء المتجهي العقدي $\mathbb{C}$

أو بتعبير آخر : كل عنصر z من $\mathbb{C}$ يكتب بطريقة وحيدة على شكل تأليفة خطية للعددين 1 و α .

خلاصة : من أجل $\alpha=i-1$ أو $\alpha=-1-i$

لدينا ψ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C},\times)$ نحو $(\mathcal{F},\times)$.

■ 4

نأخذ : $\alpha=-1+i$

لدينا :

$$\alpha=\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$
$$=\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}=\left[\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right]$$

ومنه : حسب $(Moivre)$:

$$\alpha^{2007}=\left[\sqrt{2}^{2007},\frac{2007\times 3\pi}{4}\right]$$
$$=\left[\sqrt{2}^{2007},\frac{6021\pi}{4}\right]$$

و بما أن : $\dfrac{6021\pi}{4}=2\times 752\times\pi+\dfrac{5\pi}{4}$

فإن : $\dfrac{6021\pi}{4}\equiv\dfrac{5\pi}{4}\,[2\pi]$

و منه : $\alpha^{2007}=\left[\sqrt{2}^{2007},\dfrac{5\pi}{4}\right]$

لنكتب الآن α^{2007} في الأساس $(1,\alpha)$.

ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث : $\boxed{\alpha^{2007}=x\cdot 1+y\cdot\alpha}$ $(*)$

هدفنا هو تحديد x و y

لدينا :

$$x+\alpha y=[x,0]+\left[\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right]\times[y,0]$$
$$=[x,0]+\left[\sqrt{2}y,\frac{3\pi}{4}\right]$$

إذن بالإستعانة بالمتساوية $(*)$ نحصل على :

$$\left[\sqrt{2}^{2007},\frac{5\pi}{4}\right]=[x,0]+\left[\sqrt{2}y,\frac{3\pi}{4}\right]$$

و منه : الجزءان الحقيقيان لطرفي هذه المتساوية متساويان. و الجزءان التخيليان متساويان كذلك. و من ثم نحصل على النظمة $(\mathcal{S})$ التالية :

$$(\mathcal{S}):\begin{cases}\sqrt{2}^{2007}\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)=x+\sqrt{2}y\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\\ \sqrt{2}^{2007}\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\sqrt{2}y\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\end{cases}$$

لدينا : $\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)=-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

و لدينا كذلك: $\sin\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

إذن النظمة $(\mathcal{S})$ تصبح :

$$(\mathcal{S}):\begin{cases}\sqrt{2}^{2007}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=x+\sqrt{2}y\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\\ \sqrt{2}^{2007}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{cases}$$

من المعادلة الثانية نستنتج أن : $y=-2^{1003}$

و لدينا حسب المعادلة الأولى :

$$x=-2^{1003}-(2^{1003}\times 2^0)=-2^{1004}$$

و بالتالي : $\boxed{\alpha^{2007}=(-2^{1003})+(-2^{1004})\alpha}$

بعد حصولنا على هذه الصيغة الثمينة تصبح التتمة سهلة و في المتناول

لدينا :
$$\begin{aligned} J^{2007} &= J\times J\times J\times\cdots\times J \\ &= \psi(\alpha)\times\psi(\alpha)\times\psi(\alpha)\times\cdots\times\psi(\alpha) \\ &= \psi(\alpha\times\alpha\times\alpha\times\cdots\times\alpha) \\ &= \psi(\alpha^{2007}) \\ &= \psi((-2^{1003})+(-2^{1004})\alpha) \\ &= \mathcal{M}\big((-2^{1003})\,;\,(-2^{1004})\big) \\ &= (-2^{1003})I+\ (-2^{1004})J \end{aligned}$$

و بالتالي :
$$\boxed{J^{2007} = (-2^{1003})I+\ (-2^{1004})J}$$

التمرين الخامس : (9,0 ن)

■(I)(1)(أ)

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

لدينا : $g'(x) = 1+e^{-x} > 0$

إذن : g دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

■(I)(1)(ب)

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(1+x-e^{-x}) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(1+x-e^{-x}) = +\infty$$

جدول تغيرات الدالة g .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$+$
g	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

■(I)(1)(ج)

لدينا g دالة متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ إذن فهي تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $g(\mathbb{R})$.

و لدينا :
$$\begin{aligned} g(\mathbb{R}) &= g(]-\infty,+\infty[) = \Big]\lim_{x\to-\infty} g(x)\ ;\ \lim_{x\to-\infty} g(x)\Big[\\ &=]-\infty\,;\,+\infty[= \mathbb{R} \end{aligned}$$

لدينا : $0\epsilon\mathbb{R}$ إذن يوجد عدد وحيد x_0 من $\mathbb{R}$ بحيث : $g(x_0)=0$

و لدينا حسب جدول تغيرات الدالة g : $g(0)=0$

إذن : 0 هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x)=0$.

■(I)(2)(أ)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

■(I)(2)(ب)

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{-(1+e^{-x})^2}{(1+x-e^{-x})^2}$$

■(I)(2)(ج)

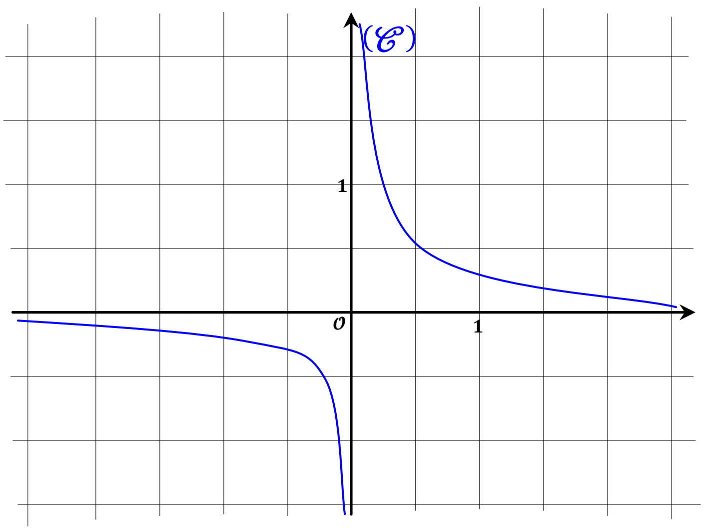
لدينا : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^*)\ ;\ f'(x) < 0$

إذن : f دالة تناقصية على $\mathbb{R}^*$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\|\|$	$-$
f	0 ↘ $-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ ↘ 0

■(I)(2)(د)



■(I)③أ

نضع : $h(x) = f(x) - n$

لدينا : $\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} (f(x) - n) = +\infty$

و $\lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{x\to +\infty} (f(x) - n) = -n$

و لدينا h دالة تناقصية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$ لأن : $h'(x) = f'(x) < 0$

و بما أن f متصلة و تناقصية على $\mathbb{R}_+^*$.

فإن : h متصلة و تناقصية على $\mathbb{R}_+^*$.

و منه : h تقابل من $]0,+\infty[$ نحو $]-n,+\infty[$

و بالتالي : $(\exists!\, x_n \in \mathbb{R}_+^*)\ ;\ h(x_n) = 0$

أي : $\boxed{(\exists!\, x_n \in \mathbb{R}_+^*)\ ;\ f(x_n) = n}$ $(*)$

■(I)③ب

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم

لدينا : $(n+1) > n$ و منه حسب $(*)$: $f(x_{n+1}) > f(x_n)$

و بما أن f دالة تناقصية فإن : $x_{n+1} < x_n$

و منه : x_n متتالية تناقصية

و بما أنها مصغورة بالعدد 0 يعني : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ x_n > 0$

فإنها متقاربة .

■(I)③ج

لدينا حسب السؤال :③أ $f(x_n) = n$

يعني : $\frac{1}{1 + x_n - e^{-x_n}} = n$

يعني : $(1 + x_n - e^{-x_n}) = \frac{1}{n}$

نجعل n يؤول إلى $(+\infty)$ نحصل على :

$$\lim_{n\to+\infty} (1 + x_n - e^{-x_n}) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)$$

يعني : $1 + \ell - e^{-\ell} = 0$ يعني : $(1 + \ell) = e^{-\ell}$

سنبرهن الآن بالخلف على أن : $\ell \neq 0$

نفترض إذن أن : $\ell > 0$.

إذن : $e^{-\ell} < 1$ و $1 + \ell > 0$

بما أن : $(1 + \ell) = e^{-\ell}$ فإن : $0 < (1 + \ell) < 1$.

يعني : $-1 < \ell < 0$

و هذا يتناقض مع كون $\ell > 0$

و بالتالي : $\boxed{\ell = \lim_{x\to+\infty} (x_n) = 0}$

■(II)①أ

ننطلق من الكتابة : $f(x) = 1$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{1 + x - e^{-x}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + x - e^{-x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-x} = x$$

■(II)①ب

نضع : $\varphi(x) = e^{-x} - x$

لدينا φ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها فرق دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$.

و منه : φ متصلة على المجال $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$.

و لدينا : $\varphi\left(\frac{1}{e}\right) = e^{\left(\frac{-1}{e}\right)} - \frac{1}{e} = \frac{1}{e^{\left(\frac{1}{e}\right)}} - \frac{1}{e}$

و $\varphi(1) = e^{-1} - 1$

لنحدد الآن إشارة كل من $\varphi\left(\frac{1}{e}\right)$ و $\varphi(1)$

لدينا : $-1 < 0$ إذن $e^{-1} < 1$ يعني : $e^{-1} - 1 < 0$

و منه : $\boxed{\varphi(1) < 0}$ (1)

و لدينا $e > 1$ إذن $\frac{1}{e} < 1$

يعني : $e^{\left(\frac{1}{e}\right)} < e$ و منه : $\frac{1}{e^{\left(\frac{1}{e}\right)}} > \frac{1}{e}$

إذن : $\boxed{\varphi\left(\frac{1}{e}\right) > 0}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $\varphi(1) \times \varphi\left(\frac{1}{e}\right) < 0$

و بالتالي حسب مبرهنة القيم الوسيطية : $\boxed{\left(\exists \alpha \in \left]\frac{1}{e}, 1\right[\right) : \varphi(\alpha) = 0}$

أو بتعبير آخر : $\boxed{\left(\exists \alpha \in \left]\frac{1}{e}, 1\right[\right) : e^{-\alpha} = \alpha}$

■(II)②أ

لنبرهن على أن : $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1 \ ; \ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

من أجل $n = 1$ لدينا $\frac{1}{e} \leq y_1 = 1 \leq 1$.

نفترض أن : $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1 \ ; \ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

إذن : $-1 \leq -y_n \leq -\frac{1}{e}$ و منه : $e^{-1} \leq e^{-y_n} \leq e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}$

إذن : $\boxed{\frac{1}{e} \leq y_{n+1} \leq \frac{1}{e^{\left(\frac{1}{e}\right)}}}$ (3)

و لدينا $\frac{1}{e} > 0$ إذن $e^{\left(\frac{1}{e}\right)} > 1$

و منه : $\boxed{\frac{1}{e^{\left(\frac{1}{e}\right)}} < 1}$ (4)

من (3) و (4) نستنتج أن : $\frac{1}{e} \leq y_{n+1} \leq 1$

و بالتالي حسب مبدأ الترجع : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ : \ \frac{1}{e} \leq y_n \leq 1}$

■(II)②ب

نضع : $\varphi(x) = e^{-x}$.

لدينا : φ دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

إذن : φ متصلة و قابلة للإشتقاق على $\overleftrightarrow{]\alpha, y_n[}$

لأن : $\overleftrightarrow{]\alpha, y_n[} \subset \mathbb{R}$

و منه حسب مبرهنة التزايدات المنتهية :

$$\left(\exists! \, c \in \overleftrightarrow{]\alpha, y_n[}\right) \ : \ \frac{|\varphi(y_n) - \varphi(\alpha)|}{|y_n - \alpha|} = |\varphi'(c)|$$

و منه : $\boxed{\left(\exists! \, c \in \overleftrightarrow{]\alpha, y_n[}\right) \ : \ |y_{n+1} - \alpha| = |\varphi'(c)||y_n - \alpha|}$ $(\star)$

لقد أدخلت الرمز $\overleftrightarrow{]\alpha, y_n[}$ لأننا لا نعلم من الأكبر هل α أم y_n

لدينا حسب السؤالين ①ب و ②أ : $\begin{cases} \frac{1}{e} \leq \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{e} \leq y_n \leq 1 \end{cases}$

بما أن : $c \in \overleftrightarrow{]\alpha, y_n[}$ فإن $\frac{1}{e} \leq c \leq 1$

و منه : $\boxed{-e^{-\left(\frac{1}{e}\right)} \leq -e^{-c} \leq -e^{-1}}$ (5)

نعلم أن العدد الموجب يكون دائما أكبر من العدد السالب .

إذن : $\boxed{-e^{-1} < e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}}$ (6)

من (5) و (6) نستنتج أن : $-e^{-\left(\frac{1}{e}\right)} \leq -e^{-c} \leq e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}$.

يعني : $|\varphi'(c)| < e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $|y_n - \alpha|$ نحصل على :

$$|y_n - \alpha||\varphi'(c)| < e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}|y_n - \alpha|$$

و منه حسب النتيجة $(\star)$:

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ : \ |y_{n+1} - \alpha| \leq e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}|y_n - \alpha|} \quad (\star\star)$$

■(II)②ج

انطلاقا من النتيجة $(\star\star)$ نستنتج أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ : \ |y_n - \alpha| \leq e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}|y_{n-1} - \alpha|$$

و ذلك بتعويض n بـ $(n-1)$

إذن :

$$\begin{aligned} |y_n - \alpha| &\leq e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}|y_{n-1} - \alpha| \\ &\leq e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}|y_{n-2} - \alpha| \\ &\leq \left(e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}\right)^3 |y_{n-3} - \alpha| \\ &\leq \left(e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}\right)^4 |y_{n-4} - \alpha| \\ &\ \ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ &\leq \left(e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}\right)^{n-1} |y_{n-(n-1)} - \alpha| \end{aligned}$$

إذن : $|y_n - \alpha| \leq \left(e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}\right)^{n-1} |y_1 - \alpha|$

يعني : $|y_n - \alpha| \leq \left(e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}\right)^{n-1} |1 - \alpha|$

لنحسب الآن نهاية المتتالية : $\left(\left(e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}\right)^{n-1} |1 - \alpha|\right)$

نعلم أن $\frac{1}{e} > 0$ إذن : $\frac{-1}{e} < 0$ و منه : $e^{\left(\frac{-1}{e}\right)} < 1$

إذن $\left(e^{\left(\frac{-1}{e}\right)}\right)^{n-1}$ متتالية هندسية أساسها محصور بين 1 و -1

إذن : $\lim\limits_{n\infty} \left(e^{\left(\frac{-1}{e}\right)}\right)^{n-1} = 0$

و منه : $\lim\limits_{n\infty} \left(e^{\left(\frac{-1}{e}\right)}\right)^{n-1} |1 - \alpha| = 0$

و بما أن : $|y_n-\alpha| \le \underbrace{\left(e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}\right)^{n-1}}_{tend\ vers\ 0} |1-\alpha|$

فإن : $\lim_{n\infty} |y_n-\alpha| = 0$ يعني : $\lim_{n\infty} y_n = \alpha$

و بالتالي : $(y_n)_{n\ge1}$ متتالية متقاربة و نهايتها هي α .

■(III)①أ

ليكن $t>0$ إذن : $e^{-t}<1$

يعني : $-e^{-t}>-1$

$$\Rightarrow \quad (t+1)-e^{-t} > (t+1)-1$$
$$\Rightarrow \quad t+1-e^{-t} > t$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{t+1-e^{-t}} < \frac{1}{t}$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{f(t) < \frac{1}{t}} \quad (1)$$

و لدينا كذلك : $-e^{-t}<0$

$$\Rightarrow \quad (t+1)-e^{-t} < (t+1)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{t+1-e^{-t}} > \frac{1}{t+1}$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{f(t) > \frac{1}{t+1}} \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall t>0) \ : \frac{1}{t+1} < \ f(t) \ < \frac{1}{t}}$$

(III)①ب

ليكن : $x>0$

لدينا حسب السؤال أ $\boxed{(\forall t>0) \ : \frac{1}{t+1} < \ f(t) \ < \frac{1}{t}}$

ندخل التكامل على هذا التأطير نحصل على :

$$\int_x^{2x} \left(\frac{1}{t+1}\right) dt < \int_x^{2x} f(t)\,dt \ < \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t}\right) dt$$

$$\Rightarrow \ [\ln(1+t)]_x^{2x} < F(x) \ < [ln(t)]_x^{2x}$$

$$\Rightarrow \ \ln(1+2x)-\ln(1+x) < F(x) \ < ln(2x)-ln(x)$$

$$\Rightarrow \ \ln\left(\frac{1+2x}{1+x}\right) < F(x) \ < ln(2)$$

و بما أن :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1+2x}{1+x}\right) = \lim_{x\to+\infty} ln\left(\frac{\frac{1}{x}+2}{\frac{1}{x}+1}\right) = \ln(2)$$

فإن : $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \ln(2)$

■(III)②أ

ليكن t عددا حقيقيا موجبا .

نضع : $\begin{cases} \varphi(t)=1-t \\ \psi(t)=1-t+\frac{t^2}{2} \\ h(t)=e^{-t} \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} \varphi'(t)=-1 \\ \psi'(t)=t-1 \\ h'(t)=-e^{-t} \end{cases}$

لدينا $t\ge0$ إذن $-t\le0$

و منه : $-e^{-t}\le-1$ يعني : $h'(t)\le\varphi'(t)$

و بما أن $h(0)=\varphi(0)=1$

فإن : $(\forall t\epsilon[0,+\infty[) \ : \ h(t)\le\varphi(t)$

إذن : $\boxed{(\forall t\epsilon[0,+\infty[) \ : \ e^{-t}\le1-t}$ (1)

من النتيجة (1) نستخلص : $-e^{-t}\ge t-1$

إذن : $h'(t)\ge\psi'(t)$

و بما أن : $h(0)=\psi(0)=1$ فإن : $h(t)\ge\psi(t)$

يعني : $\boxed{(\forall t\epsilon[0,+\infty[) \ : \ e^{-t}\ge1-t+\frac{t^2}{2}}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall t\ge0) \ : \ \left(1-t+\frac{t^2}{2}\right)\ge e^{-t}\ge(1-t)}$$

■(III)②ب

لدينا :

$$(\forall t\ge0) \ ; \ 1-t\le e^{-t}$$
$$\Rightarrow \quad (\forall t\ge0) \ ; \ t-1\ge-e^{-t}$$
$$\Rightarrow \quad (\forall t\ge0) \ ; \ (t+1)+(t-1)\ge(t+1)-e^{-t}$$
$$\Rightarrow \quad (\forall t\ge0) \ ; \ 2t\ge t+1-e^{-t}$$

$$\Rightarrow \quad (\forall t \geq 0)\ ;\ \frac{1}{2t} \leq \frac{1}{t+1-e^{-t}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{(\forall t \geq 0)\ ;\ \frac{1}{2t} \leq f(t)}\ (*)$$

و لدينا كذلك : $(\forall t \geq 0)\ :\ \left(1 - t + \frac{t^2}{2}\right) \geq e^{-t}$

$$\Rightarrow \quad (\forall t \geq 0)\ ;\ -e^{-t} \geq -1 + t - \frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad (\forall t \geq 0)\ ;\ (1+t) - e^{-t} \geq (1+t) - 1 + t - \frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad (\forall t \geq 0)\ ;\ (1+t) - e^{-t} \geq 2t - \frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad (\forall t \geq 0)\ ;\ (1+t) - e^{-t} \geq \frac{4t - t^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad (\forall t \geq 0)\ ;\ \frac{1}{1+t-e^{-t}} \leq \frac{2}{4t-t^2}$$

$$\Rightarrow \quad (\forall t \geq 0)\ ;\ f(t) \leq \frac{2}{4t-t^2}$$

و لدينا : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t}\right) = \frac{2}{4t-t^2}$

إذن : $(**)\ \boxed{(\forall t \geq 0)\ ;\ f(t) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t}\right)}$

من $(*)$ و $(**)$ نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall t \geq 0)\ ;\ \frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t}\right)}$$

■(III)2ج

ننطلق من نتيجة السؤال (ب) :

لدينا : $\frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t}\right)$

$$\Rightarrow \quad \int_x^{2x} \frac{1}{2t}dt \leq \int_x^{2x} f(t)\,dt \leq \frac{1}{2}\int_x^{2x}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t}\right)dt$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}[\ln t]_x^{2x} \leq F(x) \leq \frac{1}{2}[\ln t]_x^{2x} + \frac{1}{2}[\ln(4-t)]_x^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\ln 2}{2} \leq F(x) \leq \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4-2x}{4-x}\right)$$

و بما أن : $\lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{4-2x}{4-x}\right) = 0$

فإن : $\lim_{x\to 0^+} F(x) = \frac{\ln 2}{2}$

و بالتالي F متصلة على يمين الصفر.

■(III)3أ

لدينا f دالة متصلة على $\mathbb{R}^*$ إذن فهي تقبل دالة أصلية نرمز لها بـ $\mathcal{T}$ بحيث : $\mathcal{T}'(x) = f(x)$.

لدينا : $F(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt = [\mathcal{T}(t)]_x^{2x} = \mathcal{T}(2x) - \mathcal{T}(x)$

بما أن : $x \to 2x$ و $x \to \mathcal{T}(x)$ دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ فإن : $x \to \mathcal{T}(2x) - \mathcal{T}(x)$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$.
و لدينا : $F'(x) = 2\mathcal{T}'(x) - \mathcal{T}'(x)$.

$$= 2f(2x) - f(x)$$

$$= \frac{2}{g(2x)} - \frac{1}{g(x)}$$

$$= \frac{2g(x) - g(2x)}{g(2x)g(x)}$$

$$= \frac{2(1+x-e^{-x}) - (1+2x-e^{-2x})}{g(2x)g(x)}$$

$$= \frac{(1-2e^{-x}+e^{-2x})}{g(2x)g(x)}$$

$$= \frac{(e^{2x}-2e^{x}+1)}{e^{2x}g(2x)g(x)}$$

$$\boxed{= \frac{(e^x-1)^2}{e^{2x}g(2x)g(x)}}$$

■(III)3ب

بما أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}_+^*)\ :\ g(x) > 0$ و $g(2x) > 0$

وبما أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}_+^*)\ ;\ e^{2x} > 0$ و $(e^x - 1)^2 \geq 0$

فإن : $F'(x) \geq 0$

و بالتالي : $\boxed{F \text{ تزايدية قطعا على } \mathbb{R}_+^*}$

■ و الحمد لله رب العالمين ■