



الصفحة
1
4



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2010
الموضوع

9	المعامل:	NS25	الرياضيات	المادة:
4	مدة الإنجاز:	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)		الشعب(ة) أو المسلك:

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants deux à deux.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques .
- Le deuxième exercice se rapporte aux nombres complexes .
- Le troisième exercice se rapporte à l'arithmétique .
- Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse.
- Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse.

Les calculatrices programmables sont strictement interdites

Exercice 1 : (3,5 points) **Les partis I et II sont indépendantes.**

I - On munit l'ensemble $I =]0, +\infty[$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$(\forall (a, b) \in I \times I) \quad a * b = e^{\ln(a) \cdot \ln(b)}$$

- 0,5 1) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative dans I .
- 0,25 2) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre ε que l'on déterminera.
- 0,75 3) a-Montrer que $(I \setminus \{1\}, *)$ est un groupe commutatif.
($I \setminus \{1\}$ désigne l'ensemble I privé de 1).
- 0,25 b-Montrer que $]1, +\infty[$ est un sous-groupe de $(I \setminus \{1\}, *)$.
- 0,25 4) On munit I de la loi de composition interne \times (\times est la multiplication dans \square)
- 0,25 a-Montrer que la loi $*$ est distributive par rapport à la loi \times
- 0,5 b-Montrer que $(I, \times, *)$ est un corps commutatif.

II - On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

- 0,5 1) Calculer A^2 et A^3
- 0,5 2) En déduire que la matrice A est non inversible.

Exercice 2 : (3,5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

- 0,25 1) a-Déterminer les deux racines carrées du nombre complexe $3 + 4i$
- 0,5 b-Résoudre dans l'ensemble \square l'équation : $(E) : 4z^2 - 10iz - 7 - i = 0$
- 2) Soient a et b les solutions de l'équation (E) avec $\text{Re}(a) < 0$ et soient A et B leurs points images respectifs dans le plan complexe.
- 0,25 a-Vérifier que : $\frac{b}{a} = 1 - i$
- 0,75 b- En déduire que le triangle AOB est rectangle et isocèle en A .
- 3) Soient C un point du plan différent du point A ayant pour affixe c et D l'image du point B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$; et soit L l'image du point D par la translation de vecteur \vec{AO} .
- 0,5 a-Déterminer en fonction de c le nombre complexe d affixe du point D
- 0,5 b-Déterminer en fonction de c le nombre complexe ℓ affixe du point L
- 0,75 c-Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\frac{\ell - c}{a - c}$; en déduire la nature du triangle ACL .

Exercice 3 : (3 points)

- 1) Déterminer tous les nombres entiers naturels m tels que : $m^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$ [5]
- 2) Soit p un nombre premier tel que $p = 3 + 4k$ où k est un nombre entier naturel .
Soit n un nombre entier naturel tel que : $n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$
- 0,25 a- Vérifier que : $(n^2)^{1+2k} \equiv -1 \pmod{p}$
- 0,5 b- Montrer que n et p sont premiers entre eux.
- 0,75 c- En déduire que : $(n^2)^{1+2k} \equiv 1 \pmod{p}$
- 0,5 d- Déduire de ce qui précède qu'il n'existe pas d'entier naturel n vérifiant : $n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$

Exercice 4 : (6.25 points)

I- On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(x) = 4xe^{-x^2}$

Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 0,5 1) Calculer la limite de f en $+\infty$
- 0,75 2) Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$ puis donner son tableau de variations.
- 0,75 3) Déterminer l'équation de la demi-tangente à la courbe (C) à l'origine du repère puis construire la courbe (C) . (on prend $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$ et on admet que le point d'abscisse $\sqrt{\frac{3}{2}}$ est un point d'inflexion de la courbe (C))
- 0,5 4) Calculer l'intégrale $a = \int_0^1 f(x) dx$ puis en déduire, en centimètre carré, l'aire de la partie plane limitée par la courbe (C) , les deux axes du repère et la droite d'équation $x = 1$

II) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 .

On considère la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f_n(x) = 4x^n e^{-x^2}$

- 0,25 1) a- Montrer que : $(\forall x > 1) \quad e^{-x^2} < e^{-x}$
- 0,25 b- En déduire la limite de f_n quand x tend vers $+\infty$
- 0,75 2) Etudier les variations de la fonction f_n sur l'intervalle $[0; +\infty[$ puis donner son tableau de variations.
- 0,5 3) Montrer qu'il existe un nombre réel unique u_n de l'intervalle $]0, 1[$ tel que : $f_n(u_n) = 1$
- 0,25 4) a- Montrer que : $(\forall n \geq 2) \quad f_{n+1}(u_n) = u_n$

0,75 b-montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante, en déduire qu'elle est convergente.

4) On pose : $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

0,25 a-Montrer que : $0 < \ell \leq 1$

0,25 b-Montrer que : $(\forall n \geq 2) \quad -\frac{\ln(4)}{n} < \ln(u_n) < \frac{1}{n} - \frac{\ln(4)}{n}$

0,5 c-En déduire que : $\ell = 1$

Exercice 5 : (3.75 points)

On considère la fonction numérique F définie sur \mathbb{R}^* par : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$

0,25 1) Montrer que F est impaire.

2) Pour tout réel x de l'intervalle $]0, +\infty[$ on pose : $\varphi(x) = \int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$

0,25 a-Vérifier que : $(\forall x > 0) \quad F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$

0,5 b-Montrer que F est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis calculer $F'(x)$ pour $x > 0$.

0,5 c-En déduire le sens de variations de la fonction F sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

0,5 3) a-En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$(\forall x > 0) \quad (\exists c \in]x, 2x[) : F(x) = \frac{x}{\ln(1+c^2)}$$

0,25 b- En déduire que : $(\forall x > 0) \quad \frac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)}$

0,75 c-Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$

0,75 d-Montrer que : $F(\sqrt{e-1}) < \sqrt{e-1}$ et $F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right) > \frac{\sqrt{e-1}}{2}$

0,75 en déduire que l'équation $F(x) = x$ admet une solution unique dans $]0, +\infty[$.



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2010
عناصر الإجابة



الصفحة
1
3

9	المعامل:	NR25	الرياضيات	المادة:
4	مدة الإنجاز:	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)		الشعب(ة) أو المسلك:

التمرين الأول (3.5 نقط)	عناصر الإجابة
(1-I)	القانون * تبادلي0.25ن القانون * تجميعي0.25ن
(2)	العنصر المحايد : $\varepsilon = e$0.25ن
(3) أ-	$I \setminus \{1\}$ جزء مستقر من $(I, *)$0.25 القانون المستخلص من * تبادلي وتجميعي ويقبل ε كعنصر محايد في $I \setminus \{1\}$0.25 جميع عناصر $I \setminus \{1\}$ تقبل مماثلا في $I \setminus \{1\}$0.25
ب-	تطبيق الخاصية المميزة لزمرة جزئية.....0.25
(4) أ-	$a * (b \times c) = (a * b) \times (a * c)$0.25
ب-	زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو 10.25 القانون * توزيعي بالنسبة للقانون \times و $(I \setminus \{1\}, *)$ زمرة تبادلية.....0.25
(1-II)	نجد : $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$0.25 و $A^3 = O$0.25
(2)	إذا كانت A تقبل مقلوبا نستنتج أن $A^2 = O$ و هذا تناقض.....0.5 ن
التمرين الثاني (3.5 نقط)	عناصر الإجابة
(1) أ-	الجزران المربعان هما $2+i$ و $-2-i$0.25
ب-	حلا المعادلة هما: $-\frac{1}{2} + i$ و $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$0.5
(2) أ-0.25
ب-0.75
(3) أ-	نحصل على : $d = (1-i)c - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$0.5

الصفحة 2 3	NR25	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2010 - عناصر الإجابة - مادة: الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)
		ب- نحصل على : $\ell = (1-i)c - 1 - \frac{1}{2}i$ 0.5
		ج- نحصل على : $\frac{\ell - c}{a - c} = i$ 0.25 ثم نستنتج أن: - المثلث ACL متساوي الساقين رأسه C 0.25 - المثلث ACL قائم الزاوية في C 0.25
		التمرين الثالث (3 نقط)
		عناصر الإجابة
		نجد $m \equiv 2 [5]$ أو $m \equiv 3 [5]$ 1
		لدينا : $[p] \equiv -1 [p]$ إذن $n^2 \equiv -1 [p] \equiv (-1)^{1+2k} [p] \equiv (-1)^{1+2k} [p]$ 0.25
		لدينا $[p] \equiv n^2 + 1$ إذن : $kp - n^2 = 1$ ($\exists k \in \mathbb{Z}$) وحسب مبرهنة بوزو 0.5
		حسب مبرهنة فيرما وكون : $p - 1 = 2 + 4k$ 0.75
		د- من الأسئلة السابقة نستنتج أن : $[p] \equiv -1 [p]$ و $1 \equiv -1 [p]$ عدد أولي فردي و هذا تناقض 0.5
		التمرين الرابع (6.25 نقط)
		عناصر الإجابة
		$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 0.5
		2) f تزايدية على المجال $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ و تناقصية على المجال $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right]$ 0.5 جدول تغيرات f 0.25
		3) معادلة نصف المماس 0.25 إنشاء (C) 0.5
		4) نحصل على $a = 2\left(\frac{e-1}{e}\right)$ 0.25 مساحة الحيز المستوي هي : $8\left(\frac{e-1}{e}\right)cm^2$ 0.25
		1-II أ- 0.25
		ب- لدينا : $0 < x^n e^{-x^2} < x^n e^{-x}$ ($\forall x > 1$) و نحصل على $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ 0.25
		2) f_n تزايدية على المجال $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ و تناقصية على المجال $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty\right]$ 0.5 جدول تغيرات f_n 0.25
		3) لدينا : $f_n(0) = 0 < 1$ و $f_n(1) = \frac{4}{e} > 1$ و f_n متصلة و رتيبة قطعا على المجال $[0, 1]$ 0.5
		4) أ- لدينا : $f_{n+1}(u_n) = 4u_n^{n+1}e^{-u_n^2} = u_n$ 0.25
		ب- لدينا : $f_{n+1}(u_n) = u_n < 1 = f_{n+1}(u_{n+1})$ و f_{n+1} و f_n تزايدية قطعا على المجال $[0, 1]$ إذن المتتالية $(u_n)_{n \geq 2}$ تزايدية قطعا 0.5

الصفحة 3 3	NR25	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2010 - عناصر الإجابة مادة: الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)
		المتتالية $(u_n)_{n \geq 2}$ تزايدية قطعا و مكبورة بالعدد 1 إذن متقاربة0.25
	أ-	لدينا : $0 \leq \ell \leq 1$ و $(u_n)_{n \geq 2}$ تزايدية قطعا إذن $u_n > u_2 > 0$ $(\forall n > 2)$0.25
	ب-	لدينا : $f_n(u_n) = 1$ تكافئ $\ln(4) + n \ln(u_n) = u_n^2$ وبما أن : $0 < u_n < 1$0.25
	ج-	لدينا : $(\forall n \geq 2) \quad -\frac{\ln(4)}{n} < \ln(u_n) < \frac{1}{n} - \frac{\ln(4)}{n}$ والدالة $x \rightarrow \ln(x)$ متصلة على $]0,1[$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ عندما توول n إلى $+\infty$ نحصل على $\ln(\ell) = 0$0.5 و تقبل أية طريقة صحيحة أخرى
		عناصر الإجابة
		التمرين الخامس (3.75 نقط)
	1	الدالة F فردية0.25
	أ-20.25
	ب-	الدالة φ دالة أصلية للدالة $t \rightarrow \frac{1}{\ln(1+t^2)}$ على المجال $]0, +\infty[$ أو الدالة $t \rightarrow \frac{1}{\ln(1+t^2)}$ متصلة على المجال $]0, +\infty[$ والدالتين $v: x \rightarrow x$ و $u: x \rightarrow 2x$ قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R}_+ و $u(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$ و $v(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$0.25 و تقبل أية طريقة صحيحة أخرى لدينا $F'(x) = \frac{2}{\ln(1+4x^2)} - \frac{1}{\ln(1+x^2)}$0.25
	ج-	الدالة تناقصية قطعا على المجال $]0, \sqrt{2}[$ و تزايدية قطعا على المجال $[\sqrt{2}, +\infty[$0.5
	أ-3	لدينا : $F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$ $(\forall x > 0)$ حيث φ دالة أصلية للدالة $t \rightarrow \frac{1}{\ln(1+t^2)}$ على المجال $]0, +\infty[$ ثم نطبق مبرهنة التزايدات المنتهية0.5
	ب-	الدالة $t \rightarrow \frac{1}{\ln(1+t^2)}$ تناقصية قطعا على $[x, 2x]$0.5
	ج-	نجد : $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$ و تمنح 0.25 لكل نهاية
	د-	تمنح 0.25 لكل متفاوتة لدينا $F(x) < x$ $(\forall x > \sqrt{e-1})$ و $F(x) > x$ $(\forall x < \frac{\sqrt{e-1}}{2})$ و يوجد عدد وحيد α من المجال $[\frac{\sqrt{e-1}}{2}, \sqrt{e-1}[$ بحيث $F(\alpha) = \alpha$0.25