المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم العالي
وتكوين الأطر
والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2011
الموضوع

المادة	الرياضيات	RS22	المعامل	7
الشعب(ة) أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها		مدة الإنجاز	3

معلومات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- مدة إنجاز موضوع الامتحان : 3 ساعات ؛
- عدد الصفحات : 3 صفحات (الصفحة الأولى تتضمن معلومات والصفحتان المتبقيتان تتضمنان تمارين الامتحان)؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة ؛
- بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمرين ، فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه ولا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة .

معلومات خاصة

يتكون الموضوع من أربعة تمارين مستقلة فيما بينها و تتوزع حسب المجالات كما يلي :

التمرين	المجال	النقطة الممنوحة
التمرين الأول	حل معادلات ومتراجحات أسية نبيرية	2.5
التمرين الثاني	الأعداد العقدية	4
التمرين الثالث	المتتاليات العددية	3.5
التمرين الرابع	دراسة دالة وحساب التكامل	10

– بالنسبة للتمرين الرابع ، $\ln$ يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري .

الموضوع

التمرين الأول (2.5 ن)

1) أ – حل في IR المعادلة : $x^2-2x-3=0$. 0.5

ب – حل في IR المعادلة : $e^x-\dfrac{3}{e^x}-2=0$. 1

2) حل في IR المتراجحة : $e^{x+1}-e^{-x}\geq 0$. 1

التمرين الثاني (4 ن)

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+18=0$. 1

2) نعتبر ، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ ، النقطتين A و B .

اللتين لحقاهما على التوالي هما : $a=3+3i$ و $b=3-3i$.

أ – اكتب على الشكل المثلثي كل من العددين العقديين a و b . 0.5

ب – بين أن b' لحق النقطة B' صورة النقطة B بالإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OA}$ هو 6 . 0.75

ج – بين أن : $\dfrac{b-b'}{a-b'}=i$ ثم استنتج أن المثلث $AB'B$ متساوي الساقين وقائم الزاوية في B' . 1

د – استنتج مما سبق أن الرباعي $OAB'B$ مربع . 0.75

التمرين الثالث (3.5 ن)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=\dfrac{6u_n}{1+15u_n}$ لكل n من IN .

1) أ – تحقق من أن : $u_{n+1}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{u_n-\dfrac{1}{3}}{15u_n+1}$ لكل n من IN . 0.5

ب – بين بالترجع أن : $u_n>\dfrac{1}{3}$ لكل n من IN . 0.5

2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة بما يلي : $v_n=1-\dfrac{1}{3u_n}$ لكل n من IN . 1.5

بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{6}$ ثم اكتب v_n بدلالة n .

3) بين أن $u_n=\dfrac{1}{3-2\left(\dfrac{1}{6}\right)^n}$ لكل n من IN ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$. 1

التمرين الرابع (10 ن)

I – نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $I=\left]0,+\infty\right[$ بما يلي : $g(x)=x-1+\ln x$.

1) أ – بين أن $g'(x)=\dfrac{x+1}{x}$ لكل x من I .	0.5
ب – بين أن الدالة g تزايدية على I .	0.5
2) استنتج أن $g(x)\geq 0$ على $\left[1,+\infty\right[$ وأن $g(x)\leq 0$ على $\left]0,1\right]$ (لاحظ أن $g(1)=0$) .	1
II – لتكن f الدالة العددية المعرفة على I بما يلي : $f(x)=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)\ln x$.	
وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (الوحدة $1cm$) .	
1) أ – بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$ وأول النتيجة هندسيا .	0.75
ب – بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ (لاحظ أن $\dfrac{f(x)}{x}=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)\dfrac{\ln x}{x}$ لكل x من I) .	1
ج – استنتج أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ يتم تحديد اتجاهه .	0.5
2) أ – بين أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ لكل x من I .	1
ب – استنتج أن الدالة f تزايدية على $\left[1,+\infty\right[$ و تناقصية على $\left]0,1\right]$.	0.5
ج – أعط جدول تغيرات الدالة f على I .	0.25
3) أنشئ (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة أفصولها محصور بين $1{,}5$ و 2) .	1
4) أ – بين أن $H:x\mapsto\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto\dfrac{\ln x}{x}$ على المجال I .	0.5
ب – بين أن $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx=\frac{1}{2}$.	0.75
ج – باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx=1$.	1
5) أ – تحقق من أن $f(x)=\ln x-\dfrac{\ln x}{x}$ لكل x من I .	0.25
ب – بين أن مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$ هي : $0.5\ cm^2$.	0.5

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2011

التمرين الأول :

1 أ

لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2 - 2x - 3 = 0$

لدينا : $\Delta = (-2)^2 - 4(-3) = 16$

إذن : المعادلة تقبل حلين حقيقيين x_1 و x_2 :

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{16}}{2} = -1 \quad و \quad x_2 = \frac{2 + \sqrt{16}}{2} = 3$$

1 ب

لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $e^x - \frac{3}{e^x} - 2 = 0$

بعد توحيد المقام نحصل على : $\frac{e^{2x} - 3 - 2e^x}{e^x} = 0$

يعني : $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$

نضع : $t = e^x$. إذن المعادلة تُصبح : $t^2 - 2t - 3 = 0$

و نعلم حسب السؤال 1) أ) أن : حلي هذه المعادلة هما -1 و 3 .

إذن : $t = -1$ أو $t = 3$

يعني : $e^x = -1$ أو $e^x = 3$

نعلم أن : $e^x > 0 \; ; \; (\forall x \epsilon \mathbb{R})$

إذن المعادلة $e^x = -1$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$. و بالتالي : $e^x = 3$

يعني : $\ln(e^x) = \ln 3$ أي : $x = \ln 3$

و بالتالي : المعادلة تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$ و هو العدد الحقيقي $\ln 3$.

2

لنحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $e^{x+1} - e^{-x} \geq 0$

بعد تعميل الطرف الأيسر نحصل على: $e^{-x}(e^{2x+1} - 1) \geq 0$

نلاحظ أن إشارة الطرف الأيسر تتعلق فقط بإشارة $(e^{2x+1} - 1)$

و ذلك لأن : $e^{-x} > 0 \; ; \; (\forall x \epsilon \mathbb{R})$

لنحل أولا المعادلة $e^{2x+1} - 1 = 0$. التي تعني : $e^{2x+1} = 1$

إذن : $2x + 1 = \ln 1$ أي $2x + 1 = 0$ أي $x = \frac{-1}{2}$

و بذلك نستنتج جدول الإشارة التالي :

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	$+\infty$
e^{-x}	$+$		$+$
$e^{2x+1} - 1$	$-$	0	$+$
$e^{-x}(e^{2x+1} - 1)$	$-$	0	$+$

من خلال الجدول : $\forall \, x \, \epsilon \left[\frac{-1}{2}; +\infty\right[\; ; \; e^{-x}(e^{2x+1} - 1) \geq 0$

إذن (S) مجموعة حلول المتراجحة هي : $S = \left[\frac{-1}{2}; +\infty\right[$

التمرين الثاني :

1

لنحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 18 = 0$

لدينا : $\Delta = (-6)^2 - 4(18) = -36 = (6i)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 معرفين بما يلي :

$$z_1 = \frac{6 - 6i}{2} = 3(1 - i) \quad و \quad z_2 = \frac{6 + 6i}{2} = 3(1 + i)$$

2 أ

$$\begin{aligned} a = 3 + 3i &= 3(1+i) \\ &= 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 3\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b = 3 - 3i &= 3(1-i) \\ &= 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} - i\sin\frac{-\pi}{4}\right) \\ &= 3\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}} \end{aligned}$$

2 ب

لدينا : $\begin{cases} aff(A) = a = 3 + 3i = 3\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} \\ aff(B) = b = 3 - 3i = 3\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}} \\ aff(B') = b' \end{cases}$

و لدينا كذلك الإزاحة t معرفة بما يلي :

$$\begin{array}{ccl} (\mathcal{P}) & \rightarrow & (\mathcal{P}) \\ M & \rightarrow & M' = t_{\overrightarrow{OA}}(M) \end{array}$$

لدينا : $t_{\overrightarrow{OA}}(B) = B'$

إذن : حسب التعريف المتجهي للإزاحة نكتب : $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{OA}$

و باستعمال التعابير العقدية نكتب :

$$aff(B') - aff(B) = aff(A) - aff(O)$$

يعني : $b' - b = a$ يعني : $b' - 3 + 3i = 3 + 3i$

يعني : $b' = 3 + 3i + 3 - 3i = 6$ و بالتالي : $aff(B') = 6$

2 ج

لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{b - b'}{a - b'} &= \frac{3 - 3i - 6}{3 + 3i - 6} = \frac{-3(i+1)}{-3(1-i)} = \frac{i+1}{1-i} \\ &= \frac{(i+1)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{1^2 - i^2} = \frac{2i}{1-(-1)} = \frac{2i}{2} = i \end{aligned}$$

و بالتالي : $\frac{b - b'}{a - b'} = i$

و منه نستنتج أن : $\begin{cases} \left|\frac{b - b'}{a - b'}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{b - b'}{a - b'}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \; [2\pi] \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} |b - b'| = |a - b'| \\ \left(\overrightarrow{B'A}; \overrightarrow{B'B}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \; [2\pi] \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} B'B = B'A \\ \left(\overrightarrow{B'A}; \overrightarrow{B'B}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \; [2\pi] \end{cases}$

و من هاتين النتيجتين نستنتج أن المثلث ABB' متساوي الساقين رأسه B' و كذلك قائم الزاوية في نفس النقطة B' .

2 د

لدينا :
$$\begin{cases} OA = |z_A - z_O| = |a| = \left|3\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right| = 3\sqrt{2} \\ AB' = |z_{B'} - z_A| = |6-3-3i| = |3-3i| = 3\sqrt{2} \\ B'B = |z_B - z_{B'}| = |3-3i-6| = 3\sqrt{2} \\ BO = |z_O - z_B| = |-3+3i| = 3\sqrt{2} \end{cases}$$

نستنتج إذن أن : $OA = AB' = B'B = BO$

و منه فإن الرباعي $OAB'B$ مُعين لأن جميع أضلاعه متقايسة .

و بما أن الزاوية $\widehat{B'}$ زاوية قائمة حسب نتيجة السؤال ج) .

فإن الرباعي $OAB'B$ مربع لأنه معين و إحدى زواياه قائمة .

التمرين الثالث :

1 أ

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$. لدينا : $u_{n+1} = \dfrac{6u_n}{1+15u_n}$

إذن : $u_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{6u_n}{1+15u_n} - \dfrac{1}{3}$

يعني : $u_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{18u_n - (1+15u_n)}{3(1+15u_n)}$

يعني : $u_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{3u_n - 1}{3(1+15u_n)}$

إذن : $\boxed{u_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{u_n - \frac{1}{3}}{1+15u_n}}\ (*)$

1 ب

لنبرهن على صحة العبارة (P_n) التالية : $(P_n) : (\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n > \frac{1}{3}$

لدينا : $u_0 = 1 > \frac{1}{3}$. إذن العبارة (P_0) صحيحة .

نفترض أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n > \frac{1}{3}$

إذن : $\left(u_n - \frac{1}{3}\right)$ و $(15u_n + 1) > 6 > 0$

و منه فإن الكمية $\dfrac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1}$ موجبة قطعا لأنها خارج كميتين موجبتين قطعا

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \dfrac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1} > 0$

و منه حسب النتيجة $(*)$: $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} - \frac{1}{3} > 0$

أي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} > \frac{1}{3}$

و هذا يعني أن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

و بالتالي حسب مبدأ الترجع : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n > \frac{1}{3}$

2

ليكن n عنصرا من المجموعة $\mathbb{N}$. لدينا :

$$v_{n+1} = 1 - \frac{1}{3u_{n+1}} = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1+15u_n}{6u_n}\right) = 1 - \frac{1+15u_n}{18u_n}$$
$$= \frac{18 - (1+15u_n)}{18u_n} = \frac{3u_n - 1}{18u_n} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{6u_n}$$
$$= \frac{1}{6}\left(\frac{u_n - \frac{1}{3}}{u_n}\right) = \frac{1}{6}v_n$$

و بالتالي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_{n+1} = \frac{1}{6}v_n$

إذن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{6}$.

و منه فإن الحد العام للمتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ يُكتب على الشكل التالي :

$(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_n = v_0\left(\frac{1}{6}\right)^{n-0}$

لدينا : $v_0 = 1 - \frac{1}{3u_0} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_n = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n$

3

لدينا حسب السؤال 2) : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_n = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n$

و نعلم أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_n = 1 - \frac{1}{3u_n}$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_n = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_n = 1 - \dfrac{1}{3u_n}$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 1 - \dfrac{1}{3u_n} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n = \dfrac{1}{3u_n}$

و بالتالي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n = \dfrac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$

نلاحظ أن $\left(\frac{1}{6}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{6}$ و هو عدد حقيقي أصغر من 1 .

إذن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$

و منه : $\lim\limits_{n\infty} u_n = \lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}\right) = \dfrac{1}{3 - 2\times 0} = \dfrac{1}{3}$

و بالتالي : $\lim\limits_{n\infty}(u_n) = \dfrac{1}{3}$

التمرين الرابع :

I 1 أ

ليكن x عنصرا من المجال $I =]0;+\infty[$.

لدينا : $g(x) = x - 1 + \ln x$

إذن : $g'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x+1}{x}$

إذن : $(\forall x\in I)\ ;\ g'(x) = \dfrac{x+1}{x}$

I 1 ب

ليكن x عنصرا من المجال I . إذن : $x > 0$

و منه : $x + 1 > 1 > 0$

إذن : $(\forall x\in I)\ ;\ \dfrac{x+1}{x} > 0$

يعني : $(\forall x\in I)\ ;\ g'(x) > 0$

أي أن الدالة g تزايدية قطعا على المجال I .

I 2

ليكن x عنصرا من المجال $[1;+\infty[$. إذن : $x\geq 1$

و منه : $g(x)\geq g(1)$ لأن g دالة تزايدية قطعا على I

و لدينا : $g(1)=1-1+\ln 1=0$

إذن : $\forall\, x\,\epsilon\,[1;+\infty[\ ;\ g(x)\geq 0$

ليكن x عنصرا من المجال $]0;1]$. إذن : $x\leq 1$

و منه : $g(x)\leq g(1)$ لأن g دالة تزايدية على I .

و لدينا : $g(1)=0$

إذن : $\forall\, x\,\epsilon\,]0;1]\ ;\ g(x)\leq 0$

II 1 أ

ليكن x عنصرا من المجال I . لدينا : $f(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x$

إذن :

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln x=\left(1-\frac{1}{0^+}\right)(-\infty)$$
$$=(1-\infty)(-\infty)=(-\infty)(-\infty)=+\infty$$

إذن : $\lim_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$ و تأويلها الهندسي هو أن المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (محور الأراتيب) مقارب عمودي للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار الصفر على اليمين.

II 1 ب

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln x$$
$$=\left(1-\frac{1}{+\infty}\right)(+\infty)=(1-0)(+\infty)=+\infty$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}\ (\mathbf{1})$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\xrightarrow{+\infty}\,0}$$
$$=\left(1-\frac{1}{+\infty}\right)(0)=(1-0)(0)=0$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0}\ (\mathbf{2})$

II 1 ج

من النهايتين $(\mathbf{1})$ و $(\mathbf{2})$ نستنتج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

II 2 أ

ليكن x عنصرا من المجال I . لدينا : $f(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x$

إذن :

$$f'(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)'\ln x+(\ln x)'\left(\frac{x-1}{x}\right)$$
$$=\left(\frac{x-(x-1)}{x^2}\right)\ln x+\frac{1}{x}\left(\frac{x-1}{x}\right)$$
$$=\frac{\ln x+x-1}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

إذن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}\ ;\ (\forall x\epsilon\mathbb{R})$

II 2 ب

ليكن x عنصرا من المجال $[1;+\infty[$.

إذن حسب نتيجة السؤال I 2) : $g(x)\geq 0$

يعني : $\frac{g(x)}{x^2}\geq 0$ (لأن : $x>0$)

و منه : $\forall\, x\,\epsilon\,[1;+\infty[\ ;\ f'(x)\geq 0$

يعني أن الدالة تزايدية على المجال $[1;+\infty[$

ليكن x عنصرا من المجال $]0;1]$.

إذن حسب نتيجة السؤال I 2) : $g(x)\leq 0$

يعني : $\frac{g(x)}{x^2}\leq 0$ (لأن : $x>0$)

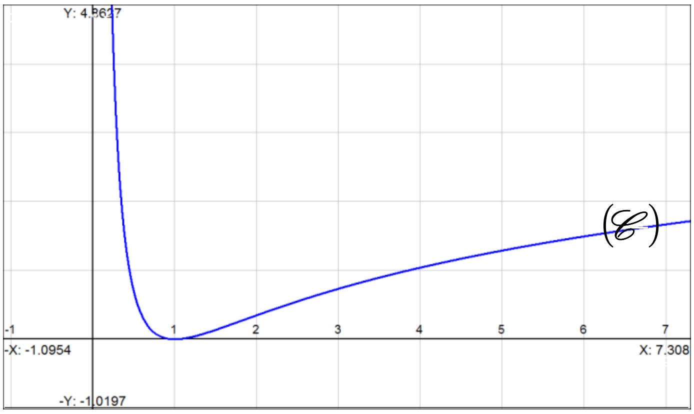
و منه : $\forall\, x\,\epsilon\,]0;1]\ ;\ f'(x)\leq 0$

يعني أن الدالة f تناقصية على المجال $]0;1]$

II 2 ج

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

II 3



II 4 أ

ليكن x عنصرا من المجال I . لدينا : $H(x)=\frac{(\ln x)^2}{2}$

إذن : $H'(x)=\frac{2(\ln x)\cdot\frac{1}{x}}{2}=\frac{\ln x}{x}=h(x)$

إذن الدالة H دالة أصلية للدالة h على المجال I .

II 4 ب

$$\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e=\frac{(\ln e)^2}{2}-\frac{(\ln 1)^2}{2}=\frac{1}{2}$$

II 4 ج

$$\int_1^e \ln x\,dx = \int_1^e \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln x}_{v}\,dx = [uv]_1^e - \int_1^e uv'dx$$

$$= [x\ln x]_1^e - \int_1^e \left(x \cdot \frac{1}{x}\right)dx = [x\ln x]_1^e - \int_1^e 1\,dx$$

$$= [x\ln x]_1^e - [x]_1^e = [x\ln x - x]_1^e$$

$$= (e\ln e - e) - (1\ln 1 - 1) = 0 - (-1) = 1$$

II 5 أ

ليكن x عنصرا من المجال I . لدينا :

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\ln x = \ln x - \frac{\ln x}{x}$$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f(x) = \ln x - \dfrac{\ln x}{x}$

II 5 ب

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = e$.

نعلم أن التكامل يقيس دائما طول أو مساحة أو حجم .

إذن : $\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^e |f(x)|\,dx$

نلاحظ حسب جدول تغيرات الدالة f أن 0 قيمة دنوية للدالة f على I .

يعني : $(\forall x \epsilon I)\ ;\ f(x) \geq 0$

و منه : $(\forall x \epsilon I)\ ;\ |f(x)| = f(x)$

إذن : $\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^e |f(x)|\,dx = \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \left(\ln x - \frac{\ln x}{x}\right)dx$

$$= \int_1^e \ln x\,dx - \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(unité)^2$$

$$= \frac{1}{2}(1\,cm)^2 = 0,5\,cm^2$$